CORRIGÉ DE LA SÉRIE N° 4

Suites numériques

2BAC PC & SVT

Prof. Taher Bouyguir | www.proftaher.com

Exercice 1

Calculer la limite de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants :

1) $u_n = 3n^5 - 7n^2 - 2$ 2) $u_n = -n^4 + 3n^2 - 5$ 3) $u_n = \dfrac{n - 2n^2 + 1}{1 + n^2}$

4) $u_n = \dfrac{n^2 - n + 7}{2n^3 + 7n^2 - 6}$ 5) $u_n = \dfrac{\sqrt{n} - 2}{4\sqrt{n} + 2}$ 6) $u_n = \dfrac{n - 7}{\sqrt{n}}$

7) $u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n+1}$ 8) $u_n = \sqrt{2n} - \sqrt{n+1}$ 9) $u_n = 2^n + 7^{-n}$

10) $u_n = 2^n - 7^n$ 11) $u_n = \dfrac{2^n - 1}{5^n + 3}$ 12) $u_n = (0{,}2)^n \dfrac{2n - 7}{n + 4}$

✔ Solution

1. Polynôme : limite du terme de plus haut degré, $\lim\limits_{n\to+\infty} 3n^5 = +\infty$.
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} (-n^4) = -\infty$.
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-2n^2}{n^2} = -2$.
4. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{2n^3} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2n} = 0$.
5. $u_n = \dfrac{1 - \frac{2}{\sqrt{n}}}{4 + \frac{2}{\sqrt{n}}} \to \dfrac{1}{4}$.
6. $u_n = \sqrt{n} - \dfrac{7}{\sqrt{n}} \to +\infty$.
7. $u_n = \dfrac{n - (n+1)}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = \dfrac{-1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} \to 0$.
8. $u_n = \dfrac{2n - (n+1)}{\sqrt{2n} + \sqrt{n+1}} = \dfrac{n - 1}{\sqrt{2n} + \sqrt{n+1}} = \dfrac{\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{2} + \sqrt{1 + \frac{1}{n}}} \to +\infty$.
9. $2 > 1 : 2^n \to +\infty$; $7^{-n} = \left(\frac{1}{7}\right)^n \to 0$. Donc $u_n \to +\infty$.
10. $u_n = 7^n \left(\left(\frac{2}{7}\right)^n - 1\right)$; $7^n \to +\infty$ et $\left(\frac{2}{7}\right)^n - 1 \to -1 : u_n \to -\infty$.
11. $u_n = \left(\dfrac{2}{5}\right)^n \times \dfrac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 + 3\left(\frac{1}{5}\right)^n} \to 0 \times 1 = 0$.
12. $(0{,}2)^n \to 0$ (car $0 < 0{,}2 < 1$) et $\dfrac{2n - 7}{n + 4} \to 2 : u_n \to 0$.

Exercice 2

(u_n) est la suite définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n = 4^n - 2^n$.

1. Montrer que : $4^n \geq 2 \times 2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. En déduire que : $u_n \geq 2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3 Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

✔ Solution

1 Pour $n \geq 1$: $2^n \geq 2$, donc $4^n = 2^n \times 2^n \geq 2 \times 2^n$.

2 $u_n = 4^n - 2^n \geq 2 \times 2^n - 2^n = 2^n$.

3 $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$ et $u_n \geq 2^n$: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 3

(u_n) est la suite définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : u_n = \dfrac{(-1)^n - 4n}{n}$.

1 Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : -\dfrac{1}{n} \leq u_n + 4 \leq \dfrac{1}{n}$.

2 Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

✔ Solution

1 $u_n + 4 = \dfrac{(-1)^n}{n}$ et $-1 \leq (-1)^n \leq 1$, d'où $-\dfrac{1}{n} \leq u_n + 4 \leq \dfrac{1}{n}$.

2 $\lim\limits_{n\to+\infty} \pm\dfrac{1}{n} = 0$: par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + 4) = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -4$.

Exercice 4

La suite (u_n) est définie par : $u_0 = 0$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} = u_n^2 + 1$.

1 Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : u_n > 0$.

2 Montrer que (u_n) est strictement croissante.

3 Montrer que : $\forall n \geq 4 : u_n \geq 2^n$.

4 Que peut-on en déduire quant à la convergence de la suite (u_n) ?

✔ Solution

1 Pour $n \geq 1$: $u_n = u_{n-1}^2 + 1 \geq 1 > 0$.

2 $u_{n+1} - u_n = u_n^2 - u_n + 1 = \left(u_n - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$.

3 $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, $u_3 = 5$, $u_4 = 26 \geq 2^4 = 16$. Si $u_n \geq 2^n$ $(n \geq 4)$, alors $u_{n+1} = u_n^2 + 1 \geq 4^n + 1 > 2 \times 2^n = 2^{n+1}$ (car $4^n \geq 2 \times 2^n$).

4 $u_n \geq 2^n \to +\infty$: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, la suite est divergente.

Exercice 5

(u_n) est la suite définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n = 3\sqrt{n} + \dfrac{5n+1}{2^n+3}$.

1 Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n \geq 3\sqrt{n}$.

2 En déduire que la suite (u_n) est divergente.

✔ Solution

1 $\dfrac{5n+1}{2^n+3} > 0$, donc $u_n \geq 3\sqrt{n}$.

2 $3\sqrt{n} \to +\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$: (u_n) diverge.

Exercice 6

(u_n) est la suite définie par : $u_0 = 2$ et $(\forall n \in \mathbb{N})$: $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 3$.

1. Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})$: $u_n \geq -6$.
2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante, et en déduire qu'elle est convergente.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = u_n + 6$.
   a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique.
   b) Déterminer le terme général de (v_n).
   c) En déduire u_n en fonction de n et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Solution

1. $u_0 = 2 \geq -6$. Si $u_n \geq -6$, alors $\frac{1}{2}u_n \geq -3$ et $u_{n+1} \geq -6$.
2. $u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{2}u_n - 3 = -\frac{1}{2}(u_n + 6) \leq 0$: (u_n) décroissante et minorée par -6, donc convergente.
3. a) $v_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 3 + 6 = \frac{1}{2}(u_n + 6) = \frac{1}{2}v_n$: géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
   b) $v_0 = 8$, donc $v_n = 8\left(\frac{1}{2}\right)^n$.
   c) $u_n = 8\left(\frac{1}{2}\right)^n - 6$; $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -6$.

Exercice 7

(u_n) est la suite définie par : $u_0 = 1$ et $(\forall n \in \mathbb{N})$: $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{4}{9}$.

1. Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})$: $u_n > \frac{2}{3}$.
2. a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
   b) En déduire que (u_n) est convergente.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = u_n - \frac{2}{3}$.
   a) Déterminer le premier terme de la suite (v_n).
   b) Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$.
   c) Déterminer le terme général de (v_n).
   d) En déduire u_n en fonction de n.
   e) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1}$.
   a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = \frac{2}{3}n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$.
   b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

Solution

Remarquons que $u_{n+1} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}u_n + \frac{4}{9} - \frac{6}{9} = \frac{1}{3}\left(u_n - \frac{2}{3}\right)$.

1. $u_0 = 1 > \frac{2}{3}$. Si $u_n > \frac{2}{3}$, alors $u_{n+1} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}\left(u_n - \frac{2}{3}\right) > 0$.
2. a) $u_{n+1} - u_n = -\frac{2}{3}u_n + \frac{4}{9} = -\frac{2}{3}\left(u_n - \frac{2}{3}\right) < 0$.
   b) Décroissante et minorée par $\frac{2}{3}$: convergente.
3. a) $v_0 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.
   b) $v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}v_n$.

c) $v_n = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$.

d) $u_n = \dfrac{2}{3} + \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}$.

e) $\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \to 0$: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{2}{3}$.

4 a) $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1}\left(\dfrac{2}{3} + \left(\dfrac{1}{3}\right)^{k+1}\right) = \dfrac{2}{3}n + \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}} = \dfrac{2}{3}n + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

Exercice 8

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 5$ et $(\forall n \in \mathbb{N})$: $u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 1}{u_n + 2}$.

1 Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})$: $u_n > 1$.

2 a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

b) En déduire que (u_n) est convergente.

3 On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$.

a) Montrer que la suite (v_n) est arithmétique de raison $r = \frac{1}{3}$.

b) Déterminer v_n en fonction de n.

4 a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$: $u_n = \dfrac{15 + 4n}{3 + 4n}$.

b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

✔ Solution

1 $u_0 = 5 > 1$. Si $u_n > 1$: $u_{n+1} - 1 = \dfrac{4u_n - 1 - u_n - 2}{u_n + 2} = \dfrac{3(u_n - 1)}{u_n + 2} > 0$.

2 a) $u_{n+1} - u_n = \dfrac{4u_n - 1 - u_n^2 - 2u_n}{u_n + 2} = \dfrac{-(u_n - 1)^2}{u_n + 2} < 0$.

b) Décroissante et minorée par 1 : convergente.

3 a) $v_{n+1} = \dfrac{1}{u_{n+1} - 1} = \dfrac{u_n + 2}{3(u_n - 1)} = \dfrac{(u_n - 1) + 3}{3(u_n - 1)} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{u_n - 1} = v_n + \dfrac{1}{3}$.

b) $v_0 = \frac{1}{4}$: $v_n = \dfrac{1}{4} + \dfrac{n}{3} = \dfrac{3 + 4n}{12}$.

4 a) $u_n = 1 + \dfrac{1}{v_n} = 1 + \dfrac{12}{3 + 4n} = \dfrac{15 + 4n}{3 + 4n}$.

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4n}{4n} = 1$.

Exercice 9

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 3$ et $(\forall n \in \mathbb{N})$: $u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 1}{4u_n + 8}$.

1 Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})$: $u_n > -\dfrac{1}{2}$.

2 a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

b) En déduire que (u_n) est convergente.

3 On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \dfrac{2}{1+2u_n}$.

a) Montrer que la suite (v_n) est arithmétique de raison $r = \frac{2}{3}$.

b) Déterminer le terme général de (v_n).

4 a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n = \dfrac{2-v_n}{2v_n}$, et en déduire u_n en fonction de n.

b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

✔ Solution

1 $u_0 = 3 > -\frac{1}{2}$. Si $u_n > -\frac{1}{2}$, alors $u_n + 2 > 0$ et $u_{n+1} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{2(4u_n-1)+4u_n+8}{2(4u_n+8)} = \dfrac{3(2u_n+1)}{4(u_n+2)} > 0$.

2 a) $u_{n+1} - u_n = \dfrac{4u_n - 1 - 4u_n^2 - 8u_n}{4(u_n+2)} = \dfrac{-(2u_n+1)^2}{4(u_n+2)} < 0$.

b) Décroissante et minorée par $-\frac{1}{2}$: convergente.

3 a) D'après 1, $1 + 2u_{n+1} = \dfrac{3(2u_n+1)}{2(u_n+2)}$, donc $v_{n+1} = \dfrac{4(u_n+2)}{3(2u_n+1)}$ et

$$v_{n+1} - v_n = \frac{4(u_n+2)-6}{3(2u_n+1)} = \frac{2(2u_n+1)}{3(2u_n+1)} = \frac{2}{3}.$$

b) $v_0 = \frac{2}{7}$: $v_n = \dfrac{2}{7} + \dfrac{2}{3}n = \dfrac{6+14n}{21}$.

4 a) $v_n(1+2u_n) = 2 \iff 2u_nv_n = 2 - v_n \iff u_n = \dfrac{2-v_n}{2v_n}$. Donc $u_n = \dfrac{2 - \frac{6+14n}{21}}{\frac{2(6+14n)}{21}} = \dfrac{36-14n}{12+28n} = \dfrac{18-7n}{6+14n}$ (contrôle : $u_0 = 3$).

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{-7}{14} = -\dfrac{1}{2}$.

Exercice 10

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3-u_n}$.

1 Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 < u_n < 2$.

2 a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n(u_n-2)}{1+(2-u_n)}$.

b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

c) En déduire que (u_n) est convergente.

3 On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = 1 - \dfrac{2}{u_n}$.

a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 3$.

b) Déterminer v_n puis u_n en fonction de n.

c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

✔ Solution

1 $0 < u_0 = \frac{1}{2} < 2$. Si $0 < u_n < 2$: $3 - u_n > 1 > 0$, donc $u_{n+1} > 0$; et $u_{n+1} - 2 = \dfrac{u_n - 6 + 2u_n}{3-u_n} = \dfrac{3(u_n-2)}{3-u_n} < 0$.

2 a) $u_{n+1}-u_n=\dfrac{u_n-3u_n+u_n^2}{3-u_n}=\dfrac{u_n(u_n-2)}{3-u_n}=\dfrac{u_n(u_n-2)}{1+(2-u_n)}$.

b) $u_n>0$, $u_n-2<0$ et $1+(2-u_n)>0$: $u_{n+1}-u_n<0$.

c) Décroissante et minorée par 0 : convergente.

3 a) $v_{n+1}=1-\dfrac{2(3-u_n)}{u_n}=1-\dfrac{6}{u_n}+2=3\left(1-\dfrac{2}{u_n}\right)=3v_n$.

b) $v_0=1-4=-3$: $v_n=-3\times 3^n=-3^{n+1}$. Puis $\dfrac{2}{u_n}=1-v_n$, donc $u_n=\dfrac{2}{1+3^{n+1}}$.

c) $3^{n+1}\to+\infty$: $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$.

Exercice 11

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0=100$ et $(\forall n\in\mathbb{N})$: $u_{n+1}=\dfrac{u_n}{u_n+10}$.

1 Montrer par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N})$: $u_n>0$.

2 Montrer que la suite (u_n) est décroissante et en déduire qu'elle est convergente.

3 a) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})$: $u_{n+1}<\dfrac{1}{10}u_n$.

b) En déduire que : $(\forall n\in\mathbb{N})$: $u_n\leq 100\left(\dfrac{1}{10}\right)^n$.

c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

✔ Solution

1 $u_0>0$; si $u_n>0$, alors $u_n+10>0$ et $u_{n+1}>0$.

2 $u_{n+1}-u_n=\dfrac{u_n-u_n^2-10u_n}{u_n+10}=\dfrac{-u_n(u_n+9)}{u_n+10}<0$: décroissante et minorée par 0, donc convergente.

3 a) $u_n+10>10$, donc $u_{n+1}=\dfrac{u_n}{u_n+10}<\dfrac{u_n}{10}$.

b) Récurrence : $u_0=100=100\left(\frac{1}{10}\right)^0$. Si $u_n\leq 100\left(\frac{1}{10}\right)^n$, alors $u_{n+1}<\frac{1}{10}u_n\leq 100\left(\frac{1}{10}\right)^{n+1}$. (L'inégalité est stricte pour $n\geq 1$; pour $n=0$ c'est une égalité.)

c) $0<u_n\leq 100\left(\frac{1}{10}\right)^n\to 0$: $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$.

Exercice 12

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0=3$ et $(\forall n\in\mathbb{N})$: $u_{n+1}=\dfrac{8(u_n-1)}{u_n+2}$.

1 Montrer par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N})$: $3\leq u_n\leq 4$.

2 Étudier la monotonie de la suite (u_n) et déduire qu'elle est convergente.

3 a) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})$: $0\leq 4-u_{n+1}\leq\dfrac{4}{5}(4-u_n)$.

b) En déduire que : $(\forall n\in\mathbb{N})$: $0\leq 4-u_n\leq\left(\dfrac{4}{5}\right)^n$.

c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

4 Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose : $v_n=\dfrac{u_n-4}{u_n-2}$.

a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $q=\frac{2}{3}$.

b) Déterminer v_n puis u_n en fonction de n.

c) Déterminer de nouveau $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

5 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ et $T_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

a) Calculer S_n en fonction de n.

b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n$.

✔ **Solution**

Posons $f(x) = \dfrac{8(x-1)}{x+2} = 8 - \dfrac{24}{x+2}$: f est strictement croissante sur $[3;4]$.

1 $3 \le u_0 \le 4$. Si $3 \le u_n \le 4$: $f(3) = \frac{16}{5} \le u_{n+1} \le f(4) = 4$, donc $3 \le u_{n+1} \le 4$.

2 $u_{n+1} - u_n = \dfrac{8u_n - 8 - u_n^2 - 2u_n}{u_n+2} = \dfrac{-(u_n-2)(u_n-4)}{u_n+2} \ge 0$ (car $u_n - 2 > 0$ et $u_n - 4 \le 0$) : (u_n) est croissante et majorée par 4, donc convergente.

3 a) $4 - u_{n+1} = \dfrac{4u_n + 8 - 8u_n + 8}{u_n+2} = \dfrac{4(4-u_n)}{u_n+2}$. Comme $4-u_n \ge 0$ et $u_n+2 \ge 5$: $0 \le 4-u_{n+1} \le \dfrac{4}{5}(4-u_n)$.

b) Récurrence : $4 - u_0 = 1 = \left(\frac{4}{5}\right)^0$; si $0 \le 4-u_n \le \left(\frac{4}{5}\right)^n$, alors $0 \le 4-u_{n+1} \le \frac{4}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^n$.

c) $\left(\frac{4}{5}\right)^n \to 0$: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4$.

4 a) $u_{n+1} - 4 = \dfrac{4(u_n-4)}{u_n+2}$ et $u_{n+1} - 2 = \dfrac{6(u_n-2)}{u_n+2}$, donc $v_{n+1} = \dfrac{4(u_n-4)}{6(u_n-2)} = \dfrac{2}{3}v_n$.

b) $v_0 = \frac{-1}{1} = -1$: $v_n = -\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$. Puis $v_n(u_n-2) = u_n - 4 \iff u_n = \dfrac{4-2v_n}{1-v_n} = \dfrac{4+2\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}$.

c) $\left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0$: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{4}{1} = 4$.

5 a) $S_n = -\dfrac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}} = -3\left(1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}\right)$.

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = -3$. Comme $u_k \ge 3$: $T_n \ge 3(n+1) \to +\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = +\infty$.

Exercice 13

Partie 1 : On considère la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 6}{x-1}$.

1 Déterminer $\mathcal{D}$, l'ensemble de définition de f.

2 Calculer les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}$.

3 Pour tout x de $\mathcal{D}$, calculer $f'(x)$.

4 Dresser le tableau de variations de f.

Partie 2 : Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 4$ et $(\forall n \in \mathbb{N})$: $u_{n+1} = f(u_n)$.

1 Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})$: $u_n \ge 3$.

2 Montrer par récurrence que la suite (u_n) est décroissante.

3 En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

✔ **Solution**

Partie 1.

1 $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

2 $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim \dfrac{x^2}{x} = \pm\infty$; le numérateur tend vers 4 en 1 : $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) =$

$+\infty$.

3 $f'(x) = \dfrac{(2x-3)(x-1)-(x^2-3x+6)}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2} = \dfrac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2}$.

4 $f(-1) = \frac{10}{-2} = -5$ et $f(3) = \frac{6}{2} = 3$:

x	$-\infty$		-1		1	1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$			$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-5	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

Partie 2.

1 $u_0 = 4 \geq 3$. Si $u_n \geq 3$, alors $u_{n+1} = f(u_n) \geq f(3) = 3$ (3 est le minimum de f sur $]1;+\infty[$).

2 $u_1 = f(4) = \frac{10}{3} \leq u_0$. Si $u_{n+1} \leq u_n$ (avec $u_n, u_{n+1} \geq 3$), comme f est croissante sur $[3;+\infty[$: $f(u_{n+1}) \leq f(u_n)$, c'est-à-dire $u_{n+2} \leq u_{n+1}$.

3 Décroissante et minorée par 3 : convergente, de limite $\ell \geq 3$. f est continue sur $[3;+\infty[$ et $f\big([3;+\infty[\big) \subset [3;+\infty[$, donc $f(\ell) = \ell : \ell^2 - 3\ell + 6 = \ell^2 - \ell \iff \ell = 3$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$.

Exercice 14

Partie 1 : f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = 5 - \dfrac{4}{x}$.

1 Étudier les variations de f et dresser le tableau de variations.

2 Déterminer les points d'intersection de la courbe de f et de la droite (Δ) d'équation $y = x$.

3 Montrer que : $\forall x \in]1;4[: f(x) > x$.

Partie 2 : Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 2$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} = f(u_n)$.

1 Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : 1 < u_n < 4$.

2 Montrer que la suite (u_n) est croissante.

3 En déduire que la suite (u_n) est convergente.

4 Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

✔ Solution

Partie 1.

1 $f'(x) = \dfrac{4}{x^2} > 0$: f est strictement croissante sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$.

x	$-\infty$		0	0		$+\infty$
$f(x)$	5	$\nearrow$	$+\infty$	$-\infty$	$\nearrow$	5

2 $f(x) = x \iff 5x - 4 = x^2 \iff x^2 - 5x + 4 = 0 \iff x = 1$ ou $x = 4$: points $(1;1)$ et $(4;4)$.

3 $f(x) - x = \dfrac{-x^2+5x-4}{x} = \dfrac{-(x-1)(x-4)}{x} > 0$ pour $x \in]1;4[$.

Partie 2.

1 $1 < u_0 = 2 < 4$. Si $1 < u_n < 4$: f étant strictement croissante sur $]0;+\infty[$, $f(1) < u_{n+1} < f(4)$, soit $1 < u_{n+1} < 4$.

2 $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n > 0$ d'après la partie 1.3.

3 Croissante et majorée par 4 : convergente.

4 f est continue sur $[1;4]$ et $f\big([1;4]\big) = [1;4]$: la limite ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$, donc $\ell \in \{1;4\}$. Comme (u_n) est croissante, $\ell \geq u_0 = 2$: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4$.

Exercice 15

Partie 1 : f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = \sqrt{2x+8}$.

1. Étudier les variations de f.
2. Étudier la position relative de la courbe représentative de f et de la droite $(\Delta) : y = x$.

Partie 2 : Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 0$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 \leq u_n \leq 4$.
2. Étudier la monotonie de la suite (u_n).
3. Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Solution

Partie 1.

1. $f'(x) = \dfrac{2}{2\sqrt{2x+8}} = \dfrac{1}{\sqrt{2x+8}} > 0$: f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, de $f(0) = 2\sqrt{2}$ à $+\infty$.
2. $f(x) - x = \dfrac{2x+8-x^2}{\sqrt{2x+8}+x} = \dfrac{-(x-4)(x+2)}{\sqrt{2x+8}+x}$: la courbe est au-dessus de (Δ) sur $[0;4[$, au-dessous sur $]4;+\infty[$, et la coupe au point $(4;4)$.

Partie 2.

1. $u_0 = 0$. Si $0 \leq u_n \leq 4$: $0 \leq 2\sqrt{2} = f(0) \leq u_{n+1} \leq f(4) = 4$.
2. $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n \geq 0$ car $u_n \in [0;4]$: (u_n) est croissante.
3. Croissante et majorée par 4 : convergente. f est continue sur $[0;4]$ et $f\big([0;4]\big) \subset [0;4]$, donc la limite ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$ avec $\ell \in [0;4]$: $\ell = 4$.

Exercice 16

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

1. a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^+ : f'(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.
   b) En déduire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
2. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^+ : f(x) \leq x$.
3. Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} = f(u_n)$.
   a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 < u_n < 1$.
   b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
   c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Solution

1. a) $f'(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1} - x\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \dfrac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.
   b) $f'(x) > 0$: f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
2. Pour $x \geq 0$: $\sqrt{x^2+1} \geq 1$, donc $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} \leq x$.
3. a) $0 < u_0 < 1$. Si $0 < u_n < 1$: $f(0) = 0 < u_{n+1} < f(1) = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$.
   b) $u_{n+1} = f(u_n) \leq u_n$: (u_n) est décroissante.
   c) Décroissante et minorée par 0 : convergente, de limite $\ell \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$. f est continue, donc $f(\ell) = \ell$: $\ell = \ell\sqrt{\ell^2+1} \iff \ell = 0$ ou $\sqrt{\ell^2+1} = 1$, donc $\ell = 0$.

Exercice 17

Soient (u_n) et (v_n) deux suites définies par : $\begin{cases} u_0 = 1 \text{ et } u_1 = 3 \\ (\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+2} = 8u_{n+1} - 7u_n \end{cases}$ et $(\forall n \in \mathbb{N})$: $v_n = u_{n+1} - u_n$.

1. Calculer u_2 ; u_3 et v_2.
2. Montrer que (v_n) est une suite géométrique.
3. Déterminer le terme général de (v_n).
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{n-1}$.
   a) Calculer la somme S_n en fonction de n.
   b) En déduire le terme général de (u_n) en fonction de n.

Solution

1. $u_2 = 24 - 7 = 17$; $u_3 = 136 - 21 = 115$; $v_2 = u_3 - u_2 = 98$.
2. $v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = 7u_{n+1} - 7u_n = 7v_n$: géométrique de raison 7.
3. $v_0 = u_1 - u_0 = 2$: $v_n = 2 \times 7^n$.
4. a) $S_n = 2 \times \dfrac{7^n - 1}{7 - 1} = \dfrac{7^n - 1}{3}$.
   b) $S_n = (u_1 - u_0) + \cdots + (u_n - u_{n-1}) = u_n - u_0$, donc $u_n = 1 + \dfrac{7^n - 1}{3} = \dfrac{7^n + 2}{3}$ (contrôle : $u_2 = \frac{51}{3} = 17$).

Exercice 18

La suite (u_n) est définie pour tout $n \geq 1$ par :

$$u_n = \frac{n}{n^2 + 1} + \frac{n}{n^2 + 2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n}.$$

1. Calculer les trois premiers termes de (u_n).
2. Démontrer que pour tout $n \geq 1$: $\dfrac{n^2}{n^2 + n} \leq u_n \leq \dfrac{n^2}{n^2 + 1}$.
3. En déduire la convergence de la suite (u_n). Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

Solution

1. $u_1 = \dfrac{1}{2}$; $u_2 = \dfrac{2}{5} + \dfrac{2}{6} = \dfrac{11}{15}$; $u_3 = \dfrac{3}{10} + \dfrac{3}{11} + \dfrac{3}{12} = \dfrac{181}{220}$.
2. Pour $1 \leq k \leq n$: $n^2 + 1 \leq n^2 + k \leq n^2 + n$, donc $\dfrac{n}{n^2 + n} \leq \dfrac{n}{n^2 + k} \leq \dfrac{n}{n^2 + 1}$. En sommant ces n inégalités : $\dfrac{n^2}{n^2 + n} \leq u_n \leq \dfrac{n^2}{n^2 + 1}$.
3. Les deux bornes tendent vers 1 : par encadrement, (u_n) converge et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

Exercice 19

1. Démontrer que la suite (u_n) définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : u_n = 1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} + \cdots + \dfrac{1}{3^n}$ est convergente. Préciser sa limite.
2. Démontrer que la suite (v_n) définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : v_n = 1 - \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} - \cdots - \dfrac{1}{2^n}$ est convergente. Préciser sa limite.

✔ Solution

1 Somme de $n+1$ termes d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$: $u_n = \dfrac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}} = \dfrac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) \to \dfrac{3}{2}$.

2 $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^n} = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$, donc $v_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \to 0$.

Exercice 20

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n = \dfrac{n}{3^n}$.

1 a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{2}{3}$.

b) En déduire que (u_n) est décroissante.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n \leq 3\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

d) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

2 Soit $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

a) Montrer que (S_n) est croissante.

b) Montrer que (S_n) est majorée par 2.

✔ Solution

1 a) $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n+1}{3n}$ et $\dfrac{n+1}{3n} \leq \dfrac{2}{3} \iff n+1 \leq 2n \iff n \geq 1$.

b) $u_n > 0$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{2}{3} < 1$, donc $u_{n+1} < u_n$.

c) Récurrence : $u_1 = \frac{1}{3} \leq 3\times\frac{2}{3} = 2$. Si $u_n \leq 3\left(\frac{2}{3}\right)^n$, alors $u_{n+1} \leq \frac{2}{3}u_n \leq 3\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$.

d) $0 < u_n \leq 3\left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0$: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

2 a) $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} > 0$.

b) Par la même récurrence qu'en 1.c) avec $u_1 = \frac{1}{3}$: $u_k \leq \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}$. Donc $S_n \leq \dfrac{1}{3}\times\dfrac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}} = 1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n < 1 \leq 2$.

Exercice 21

La suite (u_n) est définie par : $u_0 = 0$ et $(\forall n \in \mathbb{N})$: $u_{n+1} = 1 + \sqrt{1+u_n^2}$.

1 Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$: $u_n > 1$.

2 Montrer que la suite (u_n) est croissante.

3 Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$: $u_n \geq n$.

4 En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

✔ Solution

1 Pour $n \geq 1$: $u_n = 1 + \sqrt{1+u_{n-1}^2} \geq 1+1 = 2 > 1$.

2 $\sqrt{1+u_n^2} > \sqrt{u_n^2} = |u_n| \geq u_n$, donc $u_{n+1} - u_n = 1 + \sqrt{1+u_n^2} - u_n > 1 > 0$.

3 $u_0 = 0 \geq 0$. Si $u_n \geq n$, alors $u_{n+1} > u_n + 1 \geq n + 1$.

4 $u_n \geq n \to +\infty$: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 22

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.

1 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 < u_n < 2$.

2 a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $2 - u_{n+1} < \dfrac{1}{2}(2 - u_n)$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 < 2 - u_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

3 a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{3 \times 2^n}\right)$.

b) En déduire la valeur de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

✔ Solution

1 $0 < u_0 < 2$. Si $0 < u_n < 2$: $2 < 2 + u_n < 4$, donc $\sqrt{2} < u_{n+1} < 2$.

2 a) $2 - u_{n+1} = 2 - \sqrt{2 + u_n} = \dfrac{2 - u_n}{2 + \sqrt{2 + u_n}}$; comme $2 + \sqrt{2 + u_n} > 2$ et $2 - u_n > 0$: $2 - u_{n+1} < \dfrac{1}{2}(2 - u_n)$.

b) Récurrence : $0 < 2 - u_0 = 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^0$. Si $0 < 2 - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$, alors d'après 1 et a) : $0 < 2 - u_{n+1} < \frac{1}{2}(2 - u_n) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.

c) Par encadrement $\lim\limits_{n\to+\infty}(2 - u_n) = 0$: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

3 a) $u_0 = 2\cos\frac{\pi}{3} = 1$. Si $u_n = 2\cos\theta$ avec $\theta = \frac{\pi}{3\times 2^n} \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$: $u_{n+1} = \sqrt{2 + 2\cos\theta} = \sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}} = 2\cos\frac{\theta}{2}$ (car $\cos\frac{\theta}{2} > 0$), et $\frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{3\times 2^{n+1}}$.

b) $u_2 = 2\cos\frac{\pi}{12}$; or $u_1 = \sqrt{3}$ et $u_2 = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$. Comme $\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2 + \sqrt{3}$:

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

Remarque : l'énoncé d'origine écrivait $2 - u_n < \left(\frac{1}{2}\right)^n$, faux pour $n = 0$ ($2 - u_0 = 1$) ; il a été corrigé en $\leq$.

Exercice 23

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{5}(u_n - 4n - 1)$, et (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $v_n = u_n + n - 1$.

1 a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{5}$.

b) Déterminer v_n en fonction de n.

c) En déduire u_n en fonction de n.

d) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

2 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $T_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ et $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

a) Montrer que : $T_n = \dfrac{1}{4}\left(5 - \dfrac{1}{5^n}\right)$.

b) Montrer que : $S_n = T_n + \dfrac{(n+1)(2-n)}{2}$.

c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

Solution

1 a) $v_{n+1} = \dfrac{u_n - 4n - 1}{5} + n = \dfrac{u_n + n - 1}{5} = \dfrac{1}{5}v_n$.

b) $v_0 = 2 - 1 = 1$: $v_n = \left(\dfrac{1}{5}\right)^n$.

c) $u_n = v_n - n + 1 = \left(\dfrac{1}{5}\right)^n - n + 1$.

d) $\left(\frac{1}{5}\right)^n \to 0$ et $-n+1 \to -\infty$: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

2 a) $T_n = \dfrac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{5}} = \dfrac{5}{4}\left(1 - \dfrac{1}{5^{n+1}}\right) = \dfrac{1}{4}\left(5 - \dfrac{1}{5^n}\right)$.

b) $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n}(v_k - k + 1) = T_n - \dfrac{n(n+1)}{2} + (n+1) = T_n + \dfrac{(n+1)(2-n)}{2}$.

c) $T_n \to \frac{5}{4}$ et $\dfrac{(n+1)(2-n)}{2} \to -\infty$: $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = -\infty$.

Exercices complémentaires

Exercice 24

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = \dfrac{5}{4}$ et $(\forall n \in \mathbb{N})$: $u_{n+1} = \dfrac{1}{4}u_n + \dfrac{3}{2}$.

1 a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$: $u_n < 2$.

b) Étudier la monotonie de la suite (u_n). La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier.

2 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = u_n - 2$.

a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique.

b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N})$: $u_n = 2 - \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$, puis préciser la limite de la suite (u_n).

3 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}$.

a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$: $S_n = 2n - 1 + \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$.

b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

Solution

Remarquons que $u_{n+1} - 2 = \frac{1}{4}u_n - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}(u_n - 2)$.

1 a) $u_0 < 2$; si $u_n < 2$, alors $u_{n+1} - 2 = \frac{1}{4}(u_n - 2) < 0$.

b) $u_{n+1} - u_n = -\frac{3}{4}u_n + \frac{3}{2} = -\frac{3}{4}(u_n - 2) > 0$: croissante et majorée par 2, donc convergente.

2 a) $v_{n+1} = \frac{1}{4}v_n$: géométrique de raison $\frac{1}{4}$.

b) $v_0 = -\frac{3}{4}$: $v_n = -\frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^n$ et $u_n = 2 - \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{1}{4}\right)^n \to 2$.

3 a) $S_n = 2n - \dfrac{3}{4} \times \dfrac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{4}} = 2n - 1 + \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$.

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

Exercice 25 : Bac – Normale 2016

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} = \dfrac{u_n + 3}{5 - u_n}$.

1 a) Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} - 3 = \dfrac{4(u_n - 3)}{2 + (3 - u_n)}$.

b) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n < 3$.

2 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{3 - u_n}$.

a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$, puis en déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N})$: $v_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n = \dfrac{1 + 3v_n}{1 + v_n}$, puis écrire u_n en fonction de n.

c) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Solution

1 a) $u_{n+1} - 3 = \dfrac{u_n + 3 - 15 + 3u_n}{5 - u_n} = \dfrac{4(u_n - 3)}{5 - u_n} = \dfrac{4(u_n - 3)}{2 + (3 - u_n)}$.

b) $u_0 = 2 < 3$. Si $u_n < 3$: $u_n - 3 < 0$ et $2 + (3 - u_n) > 0$, donc $u_{n+1} - 3 < 0$.

2 a) $u_{n+1} - 1 = \dfrac{2(u_n - 1)}{5 - u_n}$ et $3 - u_{n+1} = \dfrac{4(3 - u_n)}{5 - u_n}$, donc $v_{n+1} = \dfrac{2(u_n - 1)}{4(3 - u_n)} = \dfrac{1}{2} v_n$. $v_0 = \frac{1}{1} = 1$: $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

b) $v_n(3 - u_n) = u_n - 1 \iff 1 + 3v_n = u_n(1 + v_n) \iff u_n = \dfrac{1 + 3v_n}{1 + v_n} = \dfrac{1 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n}$.

c) $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

Exercice 26 : Bac – Rattrapage 2011

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} = \dfrac{6u_n}{1 + 15u_n}$.

1 a) Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{u_n - \frac{1}{3}}{15u_n + 1}$.

b) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n > \dfrac{1}{3}$.

2 On considère la suite (v_n) définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}) : v_n = 1 - \dfrac{1}{3u_n}$.

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{6}$.

b) Exprimer v_n en fonction de n.

3 Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n = \dfrac{1}{3 - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n}$, puis déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Solution

1 a) $u_{n+1} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{18u_n - 1 - 15u_n}{3(1 + 15u_n)} = \dfrac{3u_n - 1}{3(15u_n + 1)} = \dfrac{u_n - \frac{1}{3}}{15u_n + 1}$.

b) $u_0 = 1 > \frac{1}{3}$. Si $u_n > \frac{1}{3}$: $15u_n + 1 > 0$ et $u_{n+1} - \frac{1}{3} > 0$.

2 a) $v_{n+1} = 1 - \dfrac{1 + 15u_n}{18u_n} = \dfrac{3u_n - 1}{18u_n} = \dfrac{1}{6} \times \dfrac{3u_n - 1}{3u_n} = \dfrac{1}{6} v_n$.

b) $v_0 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$: $v_n = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^n$.

3 $\frac{1}{3u_n} = 1 - v_n$, donc $u_n = \frac{1}{3 - 3v_n} = \frac{1}{3 - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{3}$.

Exercice 27 : Bac – Normale 2020

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = \frac{3}{2}$ et $(\forall n \in \mathbb{N})$: $u_{n+1} = \frac{2u_n}{2u_n + 5}$.

1 Calculer u_1.

2 Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})$: $u_n > 0$.

3 a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$: $0 < u_{n+1} \leq \frac{2}{5}u_n$, puis en déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N})$: $0 < u_n \leq \frac{3}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n$.

b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

4 On considère la suite (v_n) définie par : $(\forall n \in \mathbb{N})$: $v_n = \frac{4u_n}{2u_n + 3}$.

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{5}$.

b) Exprimer v_n en fonction de n, puis déduire u_n en fonction de n.

✔ Solution

1 $u_1 = \frac{3}{3+5} = \frac{3}{8}$.

2 $u_0 > 0$; si $u_n > 0$, alors $2u_n + 5 > 0$ et $u_{n+1} > 0$.

3 a) $2u_n + 5 \geq 5$, donc $0 < u_{n+1} \leq \frac{2u_n}{5}$. Par récurrence : $u_0 = \frac{3}{2}$ et $u_{n+1} \leq \frac{2}{5}u_n \leq \frac{3}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}$.

b) $\left(\frac{2}{5}\right)^n \to 0$: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

4 a) $v_{n+1} = \frac{\frac{8u_n}{2u_n+5}}{\frac{4u_n}{2u_n+5} + 3} = \frac{8u_n}{10u_n + 15} = \frac{2}{5} \times \frac{4u_n}{2u_n + 3} = \frac{2}{5}v_n$.

b) $v_0 = \frac{6}{6} = 1$: $v_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n$. $v_n(2u_n + 3) = 4u_n \iff u_n = \frac{3v_n}{4 - 2v_n} = \frac{3\left(\frac{2}{5}\right)^n}{4 - 2\left(\frac{2}{5}\right)^n}$ (contrôle : $u_0 = \frac{3}{2}$).

Exercice 28

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x} - 1}$.

1 Déterminer $\mathcal{D}_f$.

2 Montrer que pour tout $x \in \mathcal{D}_f \setminus \{0\}$: $f'(x) = \frac{\sqrt{x} - 2}{2\left(\sqrt{x} - 1\right)^2}$.

3 Dresser le tableau de variations de la fonction f.

4 a) Montrer que pour tout $x \in \mathcal{D}_f$: $f(x) - x = \frac{x\,(4 - x)}{\left(\sqrt{x} - 1\right)\left(\sqrt{x} + 2\right)}$.

b) En déduire que : $\forall x \in [4; +\infty[$: $f(x) \leq x$.

5 On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 9$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$: $u_n > 4$.

b) Étudier la monotonie de la suite (u_n).

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

✔ Solution

1 $\mathcal{D}_f = [0;1[\cup]1;+\infty[$.

2 $f'(x) = \dfrac{(\sqrt{x}-1)-\frac{x}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}-1)^2} = \dfrac{\sqrt{x}-1-\frac{\sqrt{x}}{2}}{(\sqrt{x}-1)^2} = \dfrac{\sqrt{x}-2}{2(\sqrt{x}-1)^2}$.

3 $f(0)=0$, $f(4)=4$; limites : $-\infty$ en 1^-, $+\infty$ en 1^+ et en $+\infty$.

x	0		1	1		4		$+\infty$
$f'(x)$	$-$				$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

4 a) $f(x)-x = \dfrac{x-x\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}-1} = \dfrac{x(2-\sqrt{x})}{\sqrt{x}-1} = \dfrac{x(2-\sqrt{x})(2+\sqrt{x})}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} = \dfrac{x(4-x)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}$.

b) Pour $x \geq 4$: $x>0$, $4-x\leq 0$, $\sqrt{x}-1>0$ et $\sqrt{x}+2>0$, donc $f(x)-x\leq 0$.

5 a) $u_0 = 9 > 4$. Si $u_n > 4$: f est strictement croissante sur $[4;+\infty[$, donc $u_{n+1} = f(u_n) > f(4) = 4$.

b) $u_{n+1}-u_n = f(u_n)-u_n \leq 0$: (u_n) est décroissante.

c) Décroissante et minorée par 4 : convergente, de limite $\ell \geq 4$. f est continue sur $[4;+\infty[$ et $f([4;+\infty[) = [4;+\infty[$, donc $f(\ell)=\ell$, soit $\ell(4-\ell)=0$: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4$.

Remarque : l'énoncé d'origine écrivait $\sqrt{x}\,(4-x)$ au numérateur, ce qui est faux (pour $x=9$: $f(9)-9=-4{,}5$) ; l'énoncé de la série a été corrigé en $x(4-x)$.