Prof. Taher Bouyguir

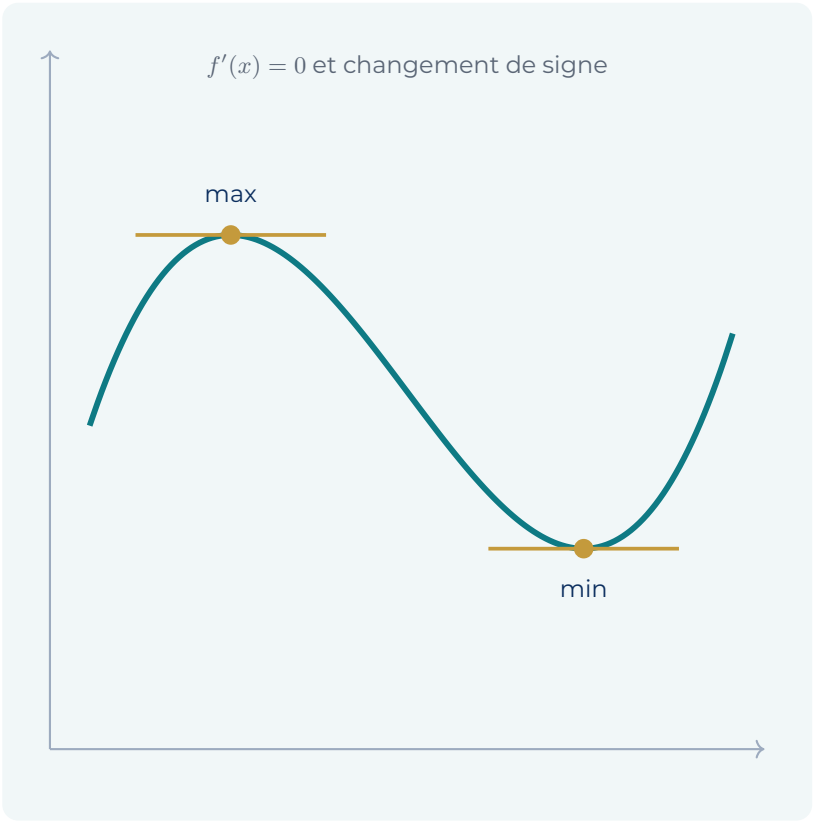
Professeur de mathématiques
Secondaire qualifiant

Prof Taher
Prof Taher Bouyguir
Taher Bouyguir
Contact WhatsApp
Telegram
mr.bouyguir@gmail.com
www.proftaher.com

1ère Spé Maths

CHAPITRE 8

Applications de la dérivation



Cours et corrigés des applications

8
Cours

Applications de la dérivation

Capacités attendues

- Parité d'une fonction, traduction graphique.
- Étudier les variations d'une fonction à l'aide de la dérivée.
- Déterminer les extremums d'une fonction à l'aide de son tableau de variation.
- Résoudre des problèmes d'optimisation.
- Exploiter les variations pour obtenir une inégalité.
- Étudier la position relative de deux courbes.

Prérequis (Chap 4 et 5) : dérivées usuelles et opérations ; équation de tangente ; signe d'un polynôme du second degré et tableaux de signes.

Table des matières

I Parité d'une fonction . . . 3
II Sens de variation et signe de la dérivée . . . 4
III Extremums d'une fonction . . . 6
IV Problèmes d'optimisation . . . 7
V Démontrer une inégalité . . . 9
VI Position relative de deux courbes . . . 10
Corrigés des applications . . . 13

I Parité d'une fonction

Définition 1 : fonction paire, fonction impaire

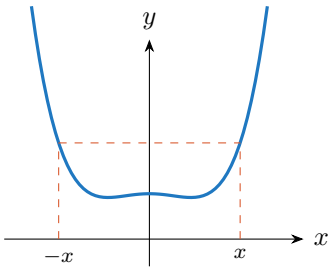
Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}$ **symétrique par rapport à** 0 (si $x \in \mathcal{D}$, alors $-x \in \mathcal{D}$).

- f est **paire** si, pour tout $x \in \mathcal{D}$, $f(-x) = f(x)$.
- f est **impaire** si, pour tout $x \in \mathcal{D}$, $f(-x) = -f(x)$.

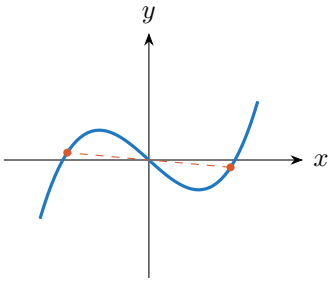
Propriété 1 : traduction graphique

Dans un repère orthogonal :

- f est paire si et seulement si sa courbe est **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées** ;
- f est impaire si et seulement si sa courbe est **symétrique par rapport à l'origine** O.



f paire : symétrie d'axe (Oy)



f impaire : symétrie de centre O

Exemple

- $f(x) = x^4 - 3x^2$ sur $\mathbb{R}$: $f(-x) = (-x)^4 - 3(-x)^2 = x^4 - 3x^2 = f(x)$: f est paire.
- $g(x) = x^3 - 5x$ sur $\mathbb{R}$: $g(-x) = -x^3 + 5x = -(x^3 - 5x) = -g(x)$: g est impaire.
- $h(x) = x^2 + x$: $h(1) = 2$ et $h(-1) = 0$; on a $h(-1) \neq h(1)$ et $h(-1) \neq -h(1)$: h n'est **ni paire ni impaire**.

Remarque

- Fonctions de référence : $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto |x|$ sont paires ; $x \mapsto x^3$ et $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sont impaires.
- Pour une fonction paire ou impaire, il suffit de l'étudier sur $\mathcal{D} \cap [0\,;+\infty[$, puis de compléter par symétrie.
- Pour montrer qu'une fonction n'est **pas** paire, un seul contre-exemple suffit.

Application 1

Étudier la parité des fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}$:

$$f(x) = 3x^2 - 1 \quad ; \quad g(x) = \frac{x}{x^2+1} \quad ; \quad h(x) = x^3 + 1 \quad ; \quad k(x) = \sqrt{x^2+4}.$$

Ma réponse :

II Sens de variation et signe de la dérivée

Théorème : *(admis)*

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si $f'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in I$, alors f est **croissante** sur I.
- Si $f'(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in I$, alors f est **décroissante** sur I.
- Si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$, alors f est **constante** sur I.

Si $f'(x) > 0$ sur I (sauf éventuellement en des points isolés où elle s'annule), f est **strictement** croissante sur I (de même pour décroissante).

Remarque

Graphiquement : là où la fonction croît, les tangentes « montent » (coefficient directeur positif) ; là où elle décroît, elles « descendent ».

Méthode : étudier les variations d'une fonction

1. Préciser l'ensemble de définition (et de dérivabilité).
2. Calculer $f'(x)$ et l'écrire sous une forme dont on sait étudier le signe (factoriser, réduire au même dénominateur).
3. Étudier le signe de $f'(x)$ (tableau de signes).
4. Dresser le tableau de variation, en calculant les images aux bornes et aux points où f' s'annule.

Exemple

$f(x) = x^3 - 3x + 1$ sur $\mathbb{R}$. $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$: racines -1 et 1, coefficient $3 > 0$.
$f(-1) = -1 + 3 + 1 = 3$ et $f(1) = 1 - 3 + 1 = -1$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	3	↘	-1	↗	

Exemple : fonction rationnelle

$g(x) = \dfrac{x^2+3}{x-1}$ sur $]1\,;+\infty[$. Formule du quotient :

$$g'(x) = \frac{2x(x-1)-(x^2+3)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2} = \frac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2}.$$

Sur $]1\,;+\infty[$, $(x-1)^2 > 0$ et $x+1>0$: $g'(x)$ a le signe de $x-3$. $g(3) = \dfrac{12}{2} = 6$.

x	1		3		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖	↘	6	↗	

Application 2

Dresser le tableau de variation de chacune des fonctions suivantes :

1. $f(x) = -x^3+6x^2-9x+2$ sur $\mathbb{R}$;
2. $g(x) = x + \dfrac{4}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$.

Ma réponse :

III Extremums d'une fonction

Définition 2 : maximum, minimum

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$.
- $f(a)$ est le **maximum** de f sur I si $f(x) \leqslant f(a)$ pour tout $x \in I$.
- $f(a)$ est le **minimum** de f sur I si $f(x) \geqslant f(a)$ pour tout $x \in I$.

Un **extremum** est un maximum ou un minimum. Il est dit **local** s'il est atteint seulement sur un intervalle ouvert contenant a (et pas forcément sur tout I).

Propriété 2

Soit f dérivable sur un intervalle ouvert I et $a \in I$. Si f' **s'annule en a en changeant de signe**, alors $f(a)$ est un extremum local de f. La tangente à la courbe au point d'abscisse a est alors horizontale.

Remarque

Le changement de signe est indispensable : pour $f(x) = x^3$, on a $f'(0) = 0$ mais $f'(x) = 3x^2 \geqslant 0$ ne change pas de signe ; f est croissante et $f(0)$ n'est pas un extremum.

Exemple

Avec $f(x) = x^3 - 3x + 1$ (partie II) : f admet un maximum local 3 en -1 et un minimum local -1 en 1.
Sur l'intervalle $[-2\,;3]$: $f(-2) = -1$ et $f(3) = 19$. Le maximum de f sur $[-2\,;3]$ est 19 (atteint en 3), le minimum est -1 (atteint en -2 et en 1).

Application 3

Soit $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$ sur l'intervalle $[-2\,;4]$.
1. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe.
2. Dresser le tableau de variation de f sur $[-2\,;4]$.
3. Déterminer les extremums locaux de f, puis son maximum et son minimum sur $[-2\,;4]$.

Ma réponse :

IV Problèmes d'optimisation

Méthode : résoudre un problème d'optimisation

1. Choisir la variable x et préciser son domaine.
2. Exprimer la grandeur à optimiser (aire, volume, coût…) comme une fonction de x.
3. Étudier les variations de cette fonction et repérer le maximum (ou le minimum).
4. Conclure par une phrase qui répond à la question.

Exemple : la boîte sans couvercle

Dans un carré de carton de 30 cm de côté, on découpe aux quatre coins un carré de côté x cm, puis on relève les bords. Quel x donne une boîte de volume maximal ?

La boîte a une base carrée de côté $30-2x$ et une hauteur x, avec $x \in]0\,;15[$: $V(x) = x(30-2x)^2$.

$$V'(x) = (30-2x)^2 + x \times 2(30-2x) \times (-2) = (30-2x)\big[(30-2x) - 4x\big] = (30-2x)(30-6x).$$

Sur $]0\,;15[$, $30-2x > 0$: $V'(x)$ a le signe de $30-6x$, positif avant 5 et négatif après.

x	0		5		15
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$	0	↗	2000	↘	0

Le volume est maximal pour $x = 5$ cm : il vaut $V(5) = 5 \times 20^2 = 2\,000$ cm^3.

Application 4

Un fermier dispose de 40 m de grillage pour construire un enclos rectangulaire le long d'un mur (le mur forme un côté et n'a pas besoin de grillage). On note x la longueur des deux côtés perpendiculaires au mur.

1. Exprimer l'aire $A(x)$ de l'enclos et préciser les valeurs possibles de x.
2. Déterminer les dimensions de l'enclos d'aire maximale.

Ma réponse :

Application 5

Une entreprise fabrique q objets par jour ($q \in [0\,;30]$). Son bénéfice, en euros, est $B(q) = -q^3 + 30q^2 - 108q$.

1. Calculer $B'(q)$ et étudier son signe.
2. Combien d'objets faut-il fabriquer pour un bénéfice maximal ? Quel est ce bénéfice ?

Ma réponse :

V Démontrer une inégalité

Méthode : montrer que $f(x) \geqslant g(x)$ sur I

1. On pose $h(x) = f(x) - g(x)$.
2. On étudie les variations de h sur I et on trouve son minimum.
3. Si ce minimum est positif ou nul, alors $h(x) \geqslant 0$, c'est-à-dire $f(x) \geqslant g(x)$, pour tout $x \in I$.

Exemple

Montrer que, pour tout $x \geqslant 0$, $x^3 \geqslant 3x - 2$.
Soit $h(x) = x^3 - 3x + 2$ sur $[0\,;+\infty[$. $h'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$; sur $[0\,;+\infty[$, h' a le signe de $x - 1$.

x	0		1		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	2	↘	0	↗	

Le minimum de h sur $[0\,;+\infty[$ est $h(1) = 0$, donc $h(x) \geqslant 0$: $x^3 \geqslant 3x - 2$ pour tout $x \geqslant 0$.

Application 6

1. Montrer que, pour tout $x > 0$, $x + \dfrac{1}{x} \geqslant 2$.
2. Montrer que, pour tout $x \geqslant 0$, $\sqrt{x} \leqslant \dfrac{x+1}{2}$.

Ma réponse :

VI Position relative de deux courbes

Méthode : position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$

On étudie le signe de $d(x) = f(x) - g(x)$:

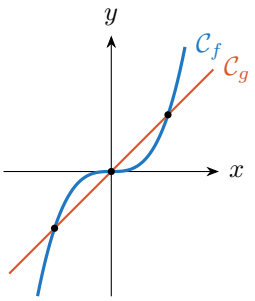
- si $d(x) > 0$, $\mathcal{C}_f$ est **au-dessus** de $\mathcal{C}_g$;
- si $d(x) < 0$, $\mathcal{C}_f$ est **en dessous** de $\mathcal{C}_g$;
- si $d(x) = 0$, les courbes se **coupent** au point d'abscisse x.

Si le signe de d ne s'obtient pas directement, on étudie les variations de d (comme en partie V).
Cas particulier important : une courbe et sa tangente (g est alors une fonction affine).

Exemple

$f(x) = x^3$ et $g(x) = x$. $d(x) = x^3 - x = x(x-1)(x+1)$.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2-1		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$d(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	



$\mathcal{C}_f$ est au-dessus de la droite $\mathcal{C}_g$ sur $]-1\,;0[\cup]1\,;+\infty[$ et en dessous sur $]-\infty\,;-1[\cup]0\,;1[$; elles se coupent aux points d'abscisses -1, 0 et 1.

Application 7

1. Étudier la position relative des courbes de $f(x) = x^2 - 2x$ et $g(x) = x + 4$.
2. Soit $f(x) = \dfrac{1}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$. Déterminer la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1, puis étudier la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à T.

Ma réponse :

Application 8

(Synthèse) Soit $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ sur $[0\,;5]$.

1. Étudier les variations de f sur $[0\,;5]$ et dresser son tableau de variation.
2. Déterminer le maximum et le minimum de f sur $[0\,;5]$. En déduire que $f(x) \geqslant 0$ sur $[0\,;5]$.
3. Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de la droite Δ d'équation $y = 4x$ sur $[0\,;5]$.

Ma réponse :

Corrigés des applications

Corrigé de l'application 1

Les quatre fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$, symétrique par rapport à 0.

- $f(-x) = 3x^2 - 1 = f(x)$: f est paire.
- $g(-x) = \dfrac{-x}{x^2+1} = -g(x)$: g est impaire.
- $h(1) = 2$ et $h(-1) = 0$: $h(-1) \neq h(1)$ et $h(-1) \neq -h(1)$, donc h n'est ni paire ni impaire.
- $k(-x) = \sqrt{(-x)^2+4} = \sqrt{x^2+4} = k(x)$: k est paire.

Corrigé de l'application 2

1 $f'(x) = -3x^2 + 12x - 9 = -3(x^2 - 4x + 3) = -3(x-1)(x-3)$: négatif à l'extérieur de $[1\,;3]$, positif entre. $f(1) = -1 + 6 - 9 + 2 = -2$; $f(3) = -27 + 54 - 27 + 2 = 2$.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘	-2	↗	2	↘	

2 $g'(x) = 1 - \dfrac{4}{x^2} = \dfrac{x^2-4}{x^2} = \dfrac{(x-2)(x+2)}{x^2}$: sur $]0\,;+\infty[$, signe de $x-2$. $g(2) = 2 + 2 = 4$.

x	0		2		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖	↘	4	↗	

Corrigé de l'application 3

1 $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2) = 6(x-2)(x+1)$: positif à l'extérieur de $[-1\,;2]$, négatif entre.

2 $f(-2) = -16-12+24+5 = 1$; $f(-1) = -2-3+12+5 = 12$; $f(2) = 16-12-24+5 = -15$; $f(4) = 128 - 48 - 48 + 5 = 37$.

x	-2		-1		2		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	↗	12	↘	-15	↗	37

3 Maximum local 12 en -1, minimum local -15 en 2. Sur $[-2\,;4]$: maximum 37 (en 4), minimum -15 (en 2).

✔ Corrigé de l'application 4

1 Le côté parallèle au mur mesure $40-2x$: $A(x)=x(40-2x)=-2x^2+40x$, avec $x\in]0\,;20[$.

2 $A'(x)=-4x+40$: positif sur $]0\,;10[$, négatif sur $]10\,;20[$. Le maximum est atteint en $x=10$: l'enclos mesure 10 m sur 20 m, et son aire vaut $A(10)=200$ m^2.

✔ Corrigé de l'application 5

1 $B'(q)=-3q^2+60q-108=-3(q^2-20q+36)=-3(q-2)(q-18)$: négatif sur $[0\,;2[$, positif sur $]2\,;18[$, négatif sur $]18\,;30]$.

2 B décroît sur $[0\,;2]$, croît sur $[2\,;18]$ et décroît sur $[18\,;30]$, avec $B(0)=0$ et $B(18)=-5832+9720-1944=1944$. Le bénéfice est maximal pour 18 objets par jour : il vaut 1 944 €.

✔ Corrigé de l'application 6

1 $h(x)=x+\dfrac{1}{x}-2$ sur $]0\,;+\infty[$: $h'(x)=1-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{(x-1)(x+1)}{x^2}$, du signe de $x-1$. h décroît sur $]0\,;1]$ et croît sur $[1\,;+\infty[$: son minimum est $h(1)=0$. Donc $h(x)\geqslant 0$, soit $x+\dfrac{1}{x}\geqslant 2$.

2 $h(x)=\dfrac{x+1}{2}-\sqrt{x}$ sur $[0\,;+\infty[$, dérivable sur $]0\,;+\infty[$: $h'(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}}$, du signe de $\sqrt{x}-1$: négatif sur $]0\,;1[$, positif sur $]1\,;+\infty[$. Le minimum de h est $h(1)=1-1=0$, donc $\sqrt{x}\leqslant\dfrac{x+1}{2}$ pour tout $x\geqslant 0$.

✔ Corrigé de l'application 7

1 $d(x)=x^2-2x-x-4=x^2-3x-4=(x-4)(x+1)$: $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$ sur $]-\infty\,;-1[\cup]4\,;+\infty[$, en dessous sur $]-1\,;4[$; elles se coupent en $x=-1$ et $x=4$.

2 $f(1)=1$, $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$, $f'(1)=-1$: $T : y=-(x-1)+1=-x+2$.

$d(x)=\dfrac{1}{x}+x-2=\dfrac{1+x^2-2x}{x}=\dfrac{(x-1)^2}{x}\geqslant 0$ sur $]0\,;+\infty[$: $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de T (et la touche au point d'abscisse 1).

Corrigé de l'application 8

1 $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$. $f(0) = 0$, $f(1) = 4$, $f(3) = 0$, $f(5) = 125 - 150 + 45 = 20$.

x	0		1		3		5
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗	4	↘	0	↗	20

2 Maximum 20 (en 5) ; minimum 0 (en 0 et en 3). Comme le minimum vaut 0, $f(x) \geqslant 0$ sur $[0\,;5]$.

3 $d(x) = x^3 - 6x^2 + 5x = x(x^2 - 6x + 5) = x(x-1)(x-5)$. Sur $[0\,;5]$: $d(x) \geqslant 0$ sur $[0\,;1]$ et $d(x) \leqslant 0$ sur $[1\,;5]$. $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de Δ sur $[0\,;1]$, en dessous sur $[1\,;5]$; elles se coupent en $x = 0$, 1 et 5.