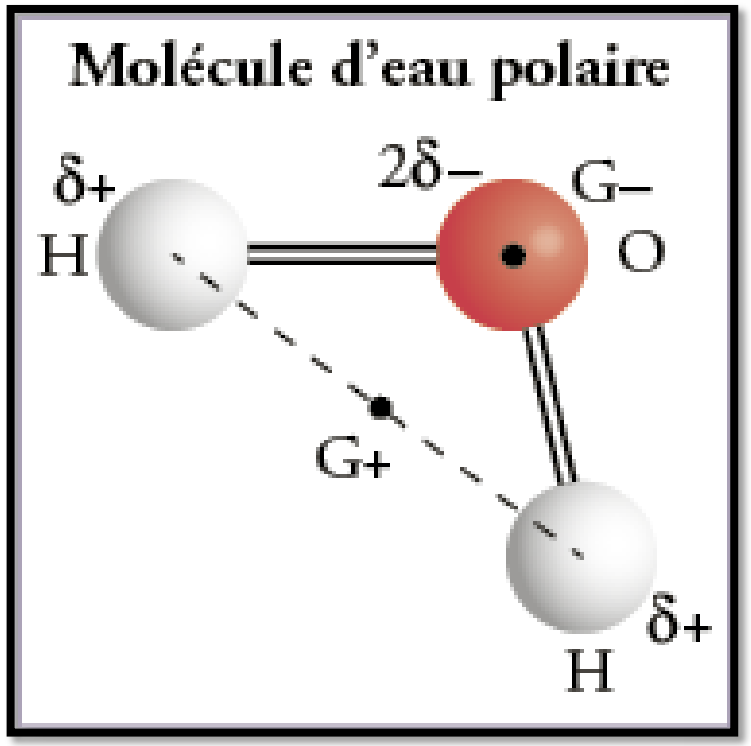
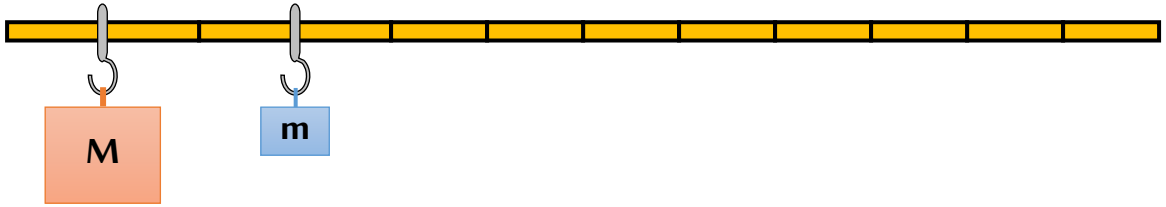
LE BARYCENTRE DANS LE PLAN



03



Activité 1

Pour déterminer la valeur d'une masse inconnue $\boldsymbol{M}$ a l'aide de « La balance Romanine », on accroche en le point A la masse à déterminer $\boldsymbol{M}$. à l'aide d'un crochet mobile on glisse la masse $\boldsymbol{m}$ qui est connue (par exemple $\mathbf{1}\ \boldsymbol{kg}$) jusqu'on obtien l'equilibre et l'ensemble est fixée en point $\boldsymbol{O}$.

À l'équilibre en utilisant l'égalité $OB = 6OA$ on obtien comme résultat $M = 6m$, la **B.R** utilise le principe d'Archimide par lequele a l'équilibre la relation $M.OM = m.OB$ est vérifiée

1- a) M.q à l'équilibre $M\overrightarrow{OA} + m\overrightarrow{OB} = 0$

b) Déterminer la position du point O pour que le system $(A; m)$ et $(B; m)$ être en équilibre $(M = m)$

2- Si $m = 300g$ et $OB = -3OA$, quelle est la valeur de la masse M

I Barycentre De Deux Points Pondérés

1) Un point Pondéré

Définition: Soit A un point du plan et a un nombre réel.

Un point pondéré est un couple (A, a) formé d'un point A et d'un coefficient réel a

2) Propriété et Définition

Soit (A, α) et (B, β) deux points pondérés du plan, tel que $\alpha + \beta \neq 0$.

Il existe un point unique G du plan tel que $\alpha\overrightarrow{AG} + \beta\overrightarrow{BG} = 0$ qui s'appelle le barycentre des points pondérés (A, α) et (B, β)

Remarque: Le point A s'appelle aussi le barycentre du system pondéré $\{(A, a); (B, \beta)\}$

Exemple: Si I est le milieu du segment $[AB]$ donc c.à.d que $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = 0$

Par suite I le barycentre des point $(A, 1)$ et $(B, 1)$

I Barycentre De Deux Points Pondérés

Application 1

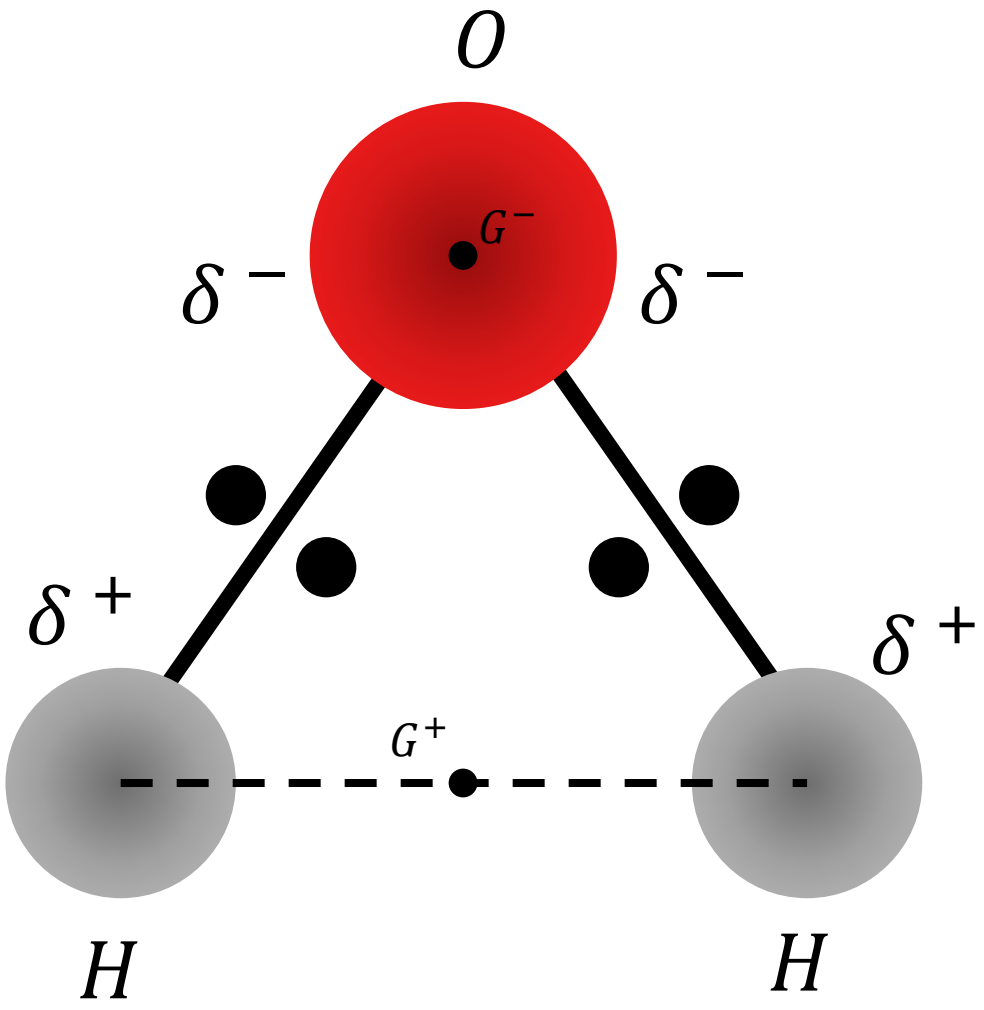
Soient A *et* B deux points et m un nombre réel.

1. Déterminer les valeurs de m pour que les deux points pondéré $(A; m)$ et $(B; m-1)$ admettent un barycentre G, et puis écrire la relation vectoriel qui lie $\overrightarrow{GA}$ et $\overrightarrow{GB}$ dans ce cas.
2. Construire le point G pour $m = 2$

2) Les propriétés de barycentre de deux points:

A- homogénéité: Le Barycentre de deux points pondéré ne change pas si on multiple ses coefficients par un nombre réel: Si G est le barycentre deux points pondérés (A, α) et (B, β) donc pour tout k de $\mathbb{R}^*$, G est aussi le barycentre de system pondéré $\{(A, k\alpha); (B, k\beta)\}$

B- la propriété caractéristique: Soient (A, α) et (B, β) deux points pondérés du plan t.q $a + b \neq 0$ et G un point du plan. G est le barycentre du system pondéré $\{(A, k\alpha); (B, k\beta)\}$ si et seulement si pour chaque point M du plan $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta)\overrightarrow{MG}$


O
G^-
$\delta -$
$\delta -$
$\delta +$
$\delta +$
G^+
H
H

I Barycentre De Deux Points Pondérés

Conclusion: En mettant $A = M$ (ou bien $B = M$) dans la relation caractéristique on obtient:

$$\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{a+\beta}\overrightarrow{AB} \qquad (ou\ \overrightarrow{BG} = \frac{\alpha}{a+\beta}\overrightarrow{BA})$$

Cela indique bien que (dans le cas de $A \neq B$) $G \in (AB)$ donc les point A, B et G sont alignés

Application 1

Soient A et B deux points et m un nombre réel.

1. Déterminer les valeurs de m pour que les deux points pondéré $(A; m)$ et $(B; m-1)$ admettent un barycentre G, et puis ecrire la relation vectoriel qui lié $\overrightarrow{GA}$ et $\overrightarrow{GB}$ dans ce cas.
2. Construire le point G si $m = 2$

II Barycentre De Trois Points Pondérés

1) Propiéte et Définition

Soient (A,α) et (B,β) et (C,γ) trois points pondérés du plan, tel que $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$.

Il existe un point unique G du plan tel que $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=0$ qui s'appelle le barycentre des points pondérés (A,α) et (B,β) et (C,γ)

Exemple: On considére les points A, B, C et D t.q $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

• Déterminer α et β et γ du sort que D soit le barycenter du system $\{(A,a);(B,\beta);(C,\gamma)\}$

$$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow 6\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AB}-4\overrightarrow{AC}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AD}=3\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}\right)-4\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}\right)$$
$$\Leftrightarrow 7\overrightarrow{DA}+3\overrightarrow{DB}-4\overrightarrow{DC}=0$$

Et comme $7+3-4=0$ donc D est le barycentre des points pondéré $(A,7),(B,3)et\ (C,+4)$

Cas particulier: $\alpha=\beta=\gamma$ Donc le barycentre des points pondéré $(A,a);(B,\beta);(C,\gamma)$ s'appelle le centre de gravité du triangle ABC. (A, B et C sont non alignés bien sur)

II Barycentre De Trois Points Pondérés

2) Des propriétes:

A- homogénéité: Si G est le barycentre de trois points pondérés (A,α), (B,β) et (C,γ) donc pour tout k de $\mathbb{R}^*$, G est aussi le barycentre de system pondéré $\{(A,ka);(B,k\beta);(C,\gamma)\}$

B- la propriété caractéristique: Soient (A,α) et (B,β) et (C,γ) trois points pondérés du plan t.q $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$ et G un point du plan.

G est le barycentre du system pondéré $\{(A,a);(B,\beta)(C,\gamma)\}$ si et seulement si pour chaque point M du plan $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$

Conclusion: En mettant $A=M$ dans la relation caractéristique on obtient:

$$\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB}+\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}$$

Et c'est une relation pour construire le point G

II Barycentre De Trois Points Pondérés

C- l'associativité du barycentre: Soient (A,α) et (B,β) et (C,γ) trois points pondéré du plan t.q $\alpha+\beta\neq 0$ et $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$ et G un point du plan.

Si G est le barycentre du system pondéré $\{(A,a);(B,\beta);(C,\gamma)\}$ et H est le barycenttre de $\{(A,a);(B,\beta)\}$ donc G est le barycenter de $\{(H,a+\beta);(C,\gamma)\}$

Application 1

Soient ABC un triangle et G le barycentre des points pondéré $(A;-2)$ et $(B;3)$ et $(C;3)$.

Soit K le barycentre de $(A;-2)$ et $(B;3)$, et H le barycentre de $(A;-2)$ et $(C;3)$ et I le milieu de [BC]

1. Construire la figure..
2. M.q G est le barycentre de $\{(K,1);(C,3)\}$ et $\{(B,3);(H,1)\}$ et $\{(A,-1);(I,3)\}$
3. Conclure que les droites (CK) et (BH) et (AI) concurrent en un point et determiner le.

III Barycentre De Quatre Points Pondérés

1) Propiéte et Définition:

Soit (A,α) et (B,β) et (C,γ) et (D,δ) quatre points pondérés du plan, tel que $\alpha+\beta+\gamma+\delta\neq 0$.

Il existe un point unique G du plan tel que $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}+\delta\overrightarrow{GD}=0$ qui s'appelle le barycentre des points pondérés (A,α) et (B,β) et (C,γ) et (D,δ)

Exemple: Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre O

Et on a $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$

- Donc O est le barycenter des points pondéré $(A;1)$ et $(B;1)$ et $(C;1)$ et $(D;1)$
- Aussi le point O s'appelle le centre de gravité du parallélogramme $ABCD$

2) Proptiéte:

A- homogénéité : Si G est le barycentre deux points pondérés (A,α), (B,β) et (C,γ) et (D,δ) donc pour tout k de $\mathbb{R}^*$, G est aussi le barycentre de system pondéré $\{(A,k\alpha);(B,k\beta);(C,k\gamma);(D,k\delta)\}$

III Le Barycentre de quatre points pondéré

B- la propriété caractéristique: Soient (A,α) et (B,β) et (C,γ) et (D,δ) trois points pondérés du plan t.q $\alpha+\beta+\gamma+\delta\neq 0$ et G un point du plan.

G est le barycentre du system pondéré $\{(A,a);(B,\beta);(C,\gamma);(D,\delta)\}$ si et seulement si pour chaque point M du plan $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}+\delta\overrightarrow{MD}=(\alpha+\beta+\gamma+\delta)\overrightarrow{MG}$

Application 1

Soient $ABCD$ un quadrelatère Soit K le barycentre de $(A;-2)$ et $(B;3)$, et H le barycentre de $(A;-2)$ et $(C;3)$ et I le milieu de $[BC]$

1. M.q les points pondérés $(A;-1)$ et $(B;3)$ et $(C;1)$ et $(D;1)$ admettent un barycentre G.
2. Construire le point G.

IV Le Barycentre de quatre points pondéré

N.B: Le plan attribué a un repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Soient (A,α) et (B,β) et (C,γ) et (D,δ) des points pondérés.

2) Propiéte et Définition

G le barycentre des points pondérés (A,α) et (B,β),
donc les coordonnées de G sont:

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha+\beta} \\ y_G = \dfrac{\alpha y_A + \beta y_B}{\alpha+\beta} \end{cases}$$

Exemple: Soionent $A(2;3)$ et $B(-1;5)$. Less coordonneés de G le barycenter de $(A;4)$ et $(B;-3)$

$x_G = \frac{4x_A-3x_B}{4+(-3)} = 11$ et $y_G = \frac{4y_A-3y_B}{4+(-3)} = -3$ c.à.d $G(11;-3)$

2) Propiéte et Définition

G le barycentre des points pondérés (A,α) et (B,β),
donc les coordonnées de G sont:

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha+\beta} \\ y_G = \dfrac{\alpha y_A + \beta y_B}{\alpha+\beta} \end{cases}$$

IV Le Barycentre de quatre points pondéré

Exemple: Soient $A(1;1)$ et $B(2;5)$ et $C(-1;0)$. Less coordonneés de G le barycentre de $(A;2)$ et $(B;-1)$ et $(C;-1)$

$x_G = \frac{2x_A - x_B + 4x_C}{2-1+4} = \frac{-4}{5}$ et $y_G = \frac{2y_A - y_B + 4y_C}{2-1+4} = \frac{-3}{5}$ c.à.d $G(\frac{-4}{5};\frac{-3}{5})$

2) Propiéte et Définition

G le barycentre des points pondérés (A,α) et (B,β) et (C,γ) et (D,δ) donc les coordonnées de G sont:

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C + \delta x_D}{\alpha + \beta + \gamma + \delta} \\ y_G = \dfrac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C + \delta y_D}{\alpha + \beta + \gamma + \delta} \end{cases}$$

Exemple: Soionent $A(-2;1)$ et $B(0;-3)$ et $C(1;-1)$ $D(-3;-2)$. Less coordonneés de G le barycenter de $(A;0.5)$ et $(B;2)$ et $(C;1)$ et $(D;-1.5)$

$x_G = \frac{0.5x_A + 2x_B + x_C - 1.5x_D}{0.5+2+1-1.5} = \frac{9}{4}$ et $y_G = \frac{0.5y_A + 2y_B + y_C - 1.5y_D}{0.5+2+1-1.5} = \frac{-7}{4}$ c.à.d $G(\frac{9}{4};\frac{-7}{4})$