Cours 3 : Barycentre

I- Barycentre de deux points 1

1) Activité 1

2) Point pondéré 1

2) Barycentre de deux points 1

2) Propriétés 3

2) Coordonnées du barycentre de deux points 4

II- Barycentre de trois points 5

1) Définition 5

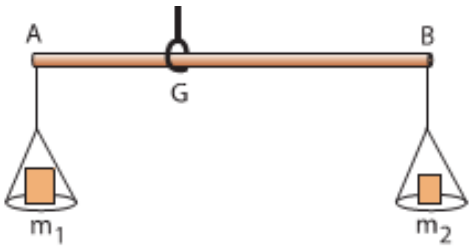
2) Propriétés 6

3) Associativité du barycentre 7

Barycentre

I- Barycentre de deux points

1) Activité



Une tige AB rigide et homogène est suspendue en un point G par un anneau, dans lequel elle peut coulisser. Aux extrémités A et B de cette tige on a accroché deux masses m_1 et m_2.
En physique et d'après le principe d'Archimède le système S est en équilibre (la tige est horizontale) lorsque $m_1 GA = m_2 GB$. On dit que le point G est le point d'équilibre des points A et B affectés respectivement des masses m_1 et m_2.
Dans toute la suite, le système S est en équilibre et les masses sont exprimées en Kg.

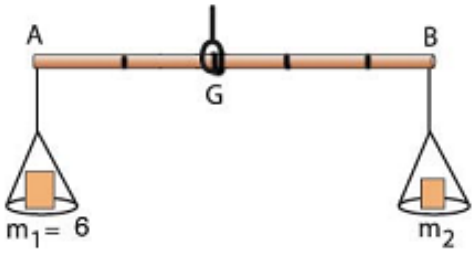
1) On prend $m_1 = 1$ et $m_2 = 2$

Préciser la position du point G sur le segment [AB] et justifier l'égalité $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} = \vec{0}$.

2) Dans chacun des cas ci-dessous, placer le point G puis traduire l'équilibre du système S par une relation vectorielle.

a) $m_1 = 3$ et $m_2 = 1$; b) $m_1 = 10$ et $m_2 = 20$; c) $m_1 = m_2 = 5$

3) Déterminer m_2 pour le système S suivant



2) Point pondéré

Définition 1 :

On appelle ***point pondéré*** tout couple (A, α) formé d'un point A du plan et d'un réel α.
Le couple (A, α) se lit aussi : « A affecté du coefficient α ».

3) Barycentre de deux points

Définition 2 : Soient (A, α) et (B, β) deux points pondérés affectés des coefficients α et β tels que $\alpha + \beta \neq 0$.

On appelle ***barycentre*** de (A, α) et (B, β) l'unique point G défini par :

$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$$

Notation : $G = Bar\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$

Construction :

Soit G le barycentre des points pondérés (A,α) et (B,β) avec $\alpha+\beta \neq 0$.
On utilise une décomposition par la relation de Chasles :

- Vu de A, on a :

$$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha\overrightarrow{GA}+\beta\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}\right)=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \quad (\alpha+\beta)\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{AB}=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}} \qquad (puisque\ \alpha+\beta\neq 0)$$

et G est alors l'unique point défini par cette relation vectorielle.

- Vu de B, on obtient de même : $\boldsymbol{\overrightarrow{BG}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{BA}}$

Exemple 1 :

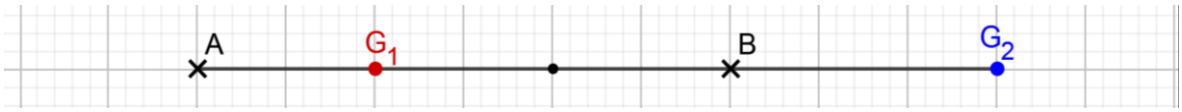
Soit $[AB]$ un segment, construire les barycentres suivants :

$$G_1 = Bar\{(A,2);(B,1)\} \quad \text{et} \quad G_2 = Bar\{(A,-1);(B,3)\}$$

Comme G_1 est le barycentre de $(A,2)$ et $(B,1)$, on a : $\overrightarrow{AG_1}=\frac{1}{2+1}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

Comme G_2 est le barycentre de $(A,-1)$ et $(B,3)$, on a : $\overrightarrow{AG_2}=\frac{3}{-1+3}\overrightarrow{AB}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

On peut alors placer les deux point G_1 et G_2 :



Remarques :

- Si : $\alpha \neq 0$ et $\beta = 0$, alors $G = A$.
- Si : $\alpha = 0$ et $\beta \neq 0$, alors $G = B$.
- Lorsque $\alpha = \beta$, on dit que G est l'***isobarycentre*** des points A et B;
  G est alors le milieu du segment $[AB]$.
- Si A et B sont deux points distincts, le barycentre G appartient à la droite (AB).
- Le barycentre de deux points est sur le segment $[AB]$ lorsque les coefficients sont de même signe.
- Le barycentre de deux points est plus près du point dont le coefficient en valeur absolue est le plus grand.

Application 1 :

Soient A et B deux points distincts dans le plan

a) Construire G le barycentre des points pondérés $(A,-2)$ et $(B,3)$.

b) Construire G' le barycentre des points pondérés $(A,2)$ et $(B,2)$.

c) Calculer $\overrightarrow{GG'}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.

4) Propriétés

Propriété 1 : Homogénéité du barycentre

Le barycentre de deux points reste inchangé lorsqu'on multiplie tous les coefficients par un même nombre non nul.

Si $G = Bar\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$, alors $G = Bar\{(A,\boldsymbol{k\alpha});(B,\boldsymbol{k\beta})\}$ pour tout $k \in \mathbb{R}^*$.

Exemple 2 :

Le barycentre de $\left(A,\frac{-3}{10}\right)$ et $\left(B,\frac{-3}{5}\right)$ est aussi le barycentre de $(A,3)$ et $(B,6)$, qui est aussi le barycentre de $(A,1)$ et $(B,2)$.

Propriété 2 : Formule de réduction

Si G est le barycentre de (A,α) et (B,β), alors pour tout point M du plan, on a :

$$\boldsymbol{\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = (\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}}$$

Exemple 3 :

$[AB]$ est un segment de longueur 5 cm. Déterminer l'ensemble $(\mathcal{C})$ des point M qui vérifient la relation : $\left\|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\right\| = 10$.

On pose le point G barycentre de $(A,2)$ et $(B,3)$, d'après la formule de réduction, on a : $2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = 5\overrightarrow{MG}$

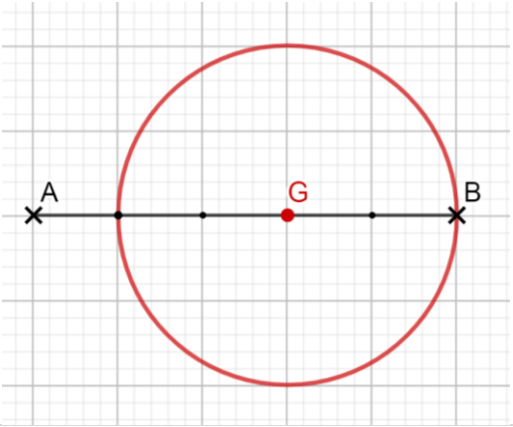
Donc : $\left\|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\right\| = 10 \quad \Leftrightarrow \quad \left\|5\overrightarrow{MG}\right\| = 10 \quad \Leftrightarrow \quad MG = 2$

L'ensemble $(\mathcal{C})$ est donc le cercle de centre G est de rayon 2.

Pour tracer $(\mathcal{C})$, on trace d'abord G qui vérifie :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$$

On trace ensuite le cercle $(\mathcal{C})$ en remarquant qu'il passe par B.



Application 2 :

Soient A et B deux points dans le plan et I le milieu du segment $[AB]$.

Soit G le barycentre des points pondérés $(A,3)$ et $(B,-5)$.

Déterminer l'ensemble des points M dans le plan tel que :

$$\left\|3\overrightarrow{MA}-5\overrightarrow{MB}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|$$

Application 3 :

Soit ABC un triangle et $A' = Bar\{(A,-2);(B,3)\}$ et $B' = Bar\{(A,2);(C,-1)\}$ et $C' = Bar\{(B,-3);(C,1)\}$.

① Montrer que : Pour tout point M du plan on a : $\overrightarrow{MA'}+\overrightarrow{MB'}-2\overrightarrow{MC'}=\vec{0}$.

② En déduire que les points A' , B' et C' sont alignés.

5) Coordonnées du barycentre de deux points :

Propriété 3 :

Soient $A(x_A,y_A)$ et $B(x_B,y_B)$ deux points dans un repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Le point G, barycentre des points (A,α) et (B,β) a pour coordonnées :

$$G\left(\frac{\alpha x_A+\beta x_B}{\alpha+\beta},\frac{\alpha y_A+\beta y_B}{\alpha+\beta}\right)$$

Exemple 4 :

Dans un repère du plan, on donne les points $A(1,3)$ et $B(2,1)$.

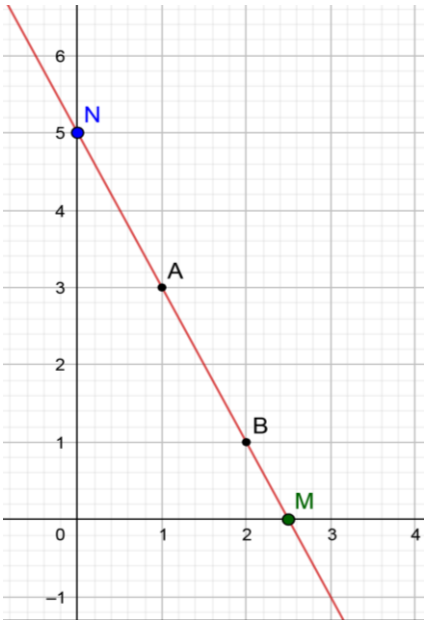
Déterminer les coordonnées des points M, barycentre de $(A,-1)$ et $(B,3)$ et N, barycentre de $(A,2)$ et $(B,-1)$; puis placer les point : A , B , M et N.

On applique la Propriété précédente pour obtenir les coordonnées des points $M(x_M,y_M)$ et $N(x_N,y_N)$:

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{-1x_A+3x_B}{-1+3} = \dfrac{-1\times 1+3\times 2}{-1+3} = \dfrac{5}{2} \\ y_M = \dfrac{-1y_A+3y_B}{-1+3} = \dfrac{-1\times 3+3\times 1}{-1+3} = 0 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} x_N = \dfrac{2x_A+(-1)x_B}{2+(-1)} = \dfrac{2\times 1-1\times 2}{2-1} = 0 \\ y_N = \dfrac{2y_A+(-1)y_B}{2+(-1)} = \dfrac{2\times 3-1\times 1}{2-1} = 5 \end{cases}$$



Application 4 :

Soit G le barycentre des points pondérés $(A,4)$ et $(B,-1)$ tel que : $A(5,-2)$ et $B(0,7)$.

Calculer les coordonnés de G.

II- Barycentre de trois points

Les définitions et propriétés du paragraphe précédent s'étendent au cas de trois points pondérés.

1) Définition

Définition 3 : Soient (A,α), (B,β) et (C,γ) trois points pondérés affectés des coefficients α, β et γ tels que $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$.

On appelle ***barycentre*** de (A,α), (B,β) et (C,γ) l'unique point G défini par :

$$\boldsymbol{\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}}$$

Démonstration :

Exprimons le point G a l'aide du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ avec la relation de Chasles :

$$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0} \quad\Leftrightarrow\quad \alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{AB}+\gamma\overrightarrow{GA}+\gamma\overrightarrow{AC}=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow\quad (\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{AB}+\gamma\overrightarrow{AC}=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow\quad -(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{AG}=-\beta\overrightarrow{AB}-\gamma\overrightarrow{AC}$$

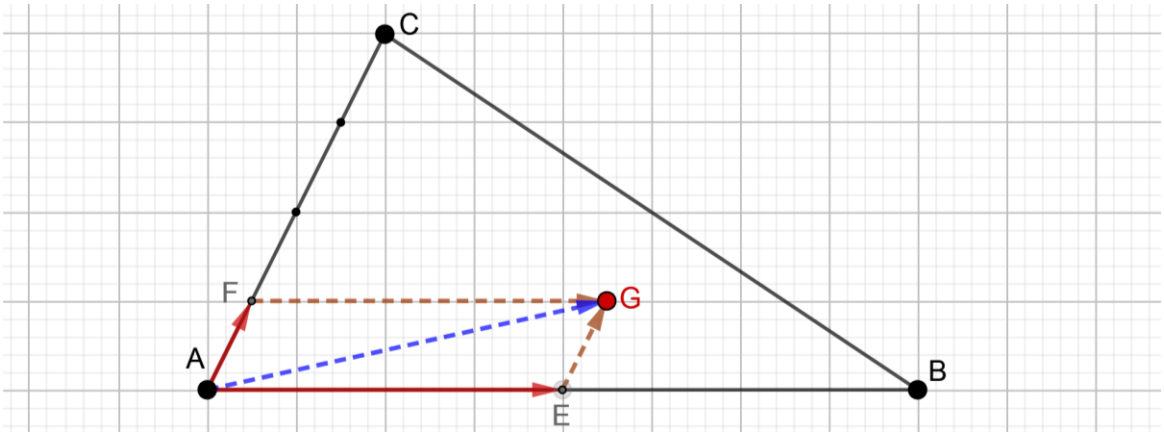
$$\Leftrightarrow\quad \boldsymbol{\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}} \quad (puisque\ \alpha+\beta+\gamma\neq 0)$$

et G est alors l'unique point défini par cette relation vectorielle.

Exemple 5 :

Soit un triangle ABC. Placer le barycentre G des points pondérés $(A,1)$, $(B,2)$ et $(C,1)$.

on a : $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{1+2+1}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{1+2+1}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$



2) Propriétés

Le barycentre de trois points vérifie les mêmes propriétés que le barycentre de deux points :

- ***Homogénéité du barycentre*** :

  le barycentre des points pondérés (A,α), (B,β) et (C,γ) est également le barycentre des points pondérés $(A,k\alpha)$, $(B,k\beta)$ et $(C,k\gamma)$ pour tout $k \in \mathbb{R}^*$.

- ***Réduction vectorielle*** : pour tout point M du plan, on a :

$$\boldsymbol{\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}}$$

- Le point G, a pour ***coordonnées*** dans un repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$:

$$G\left(\frac{\boldsymbol{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}}{\boldsymbol{\alpha+\beta+\gamma}},\frac{\boldsymbol{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}}{\boldsymbol{\alpha+\beta+\gamma}}\right)$$

- L'***isobarycentre*** $(\alpha=\beta=\gamma)$ de trois points A, B et C est le centre de gravité du triangle ABC (si les trois points sont distincts).

Remarques :

- Si on veut réduire la somme $2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}$, on introduit G le barycentre de $(A,2)$, $(B,-1)$ et $(C,3)$. On a alors,

$$2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}=(2-1+3)\overrightarrow{MG}=4\overrightarrow{MG}$$

- Si la somme des coefficients est nulle, on ne peut plus utiliser un barycentre.

  Mais en utilisant la relation de Chasles, on peut montrer que la somme de vecteurs est en fait indépendante du point M.

  Exemple :

$$2\overrightarrow{MA}-5\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MA}-5\overrightarrow{MA}-5\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{AC}=-5\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$$

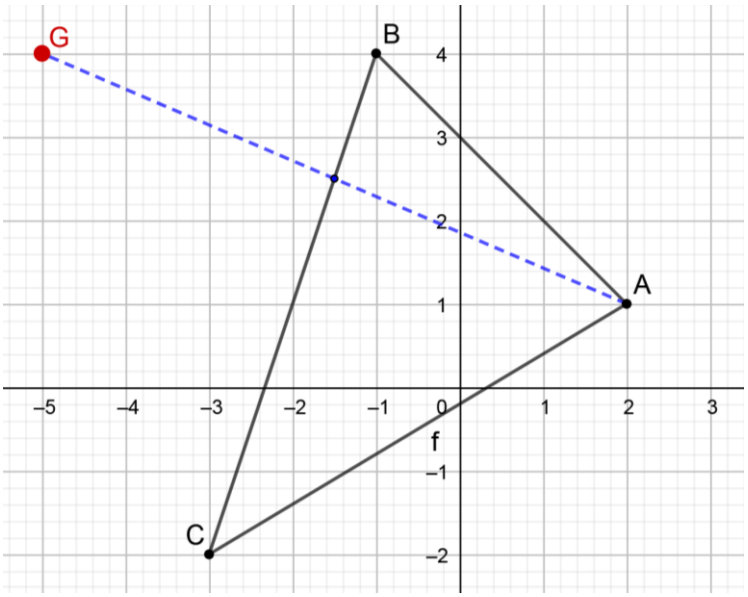
Exemple 6 :

Dans un repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on donne les points $A(2,1)$, $B(-1,4)$ et $C(-3,-2)$.

Déterminer les coordonnées du point G barycentre des points $(A,-2)$, $(B,3)$ et $(C,1)$; puis placer les point : A , B , C et G.

On utilise la formule donnant les coordonnées de $G(x_G, y_G)$:

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{-2x_A + 3x_B + x_C}{-2+3+1} = \dfrac{-2\times 2 + 3\times(-1) + (-3)}{2} = \dfrac{-10}{2} = -5 \\ y_G = \dfrac{-2y_A + 3y_B + y_C}{-2+3+1} = \dfrac{-2\times 1 + 3\times 4 + (-2)}{2} = \dfrac{8}{2} = 4 \end{cases}$$



3) Associativité du barycentre

Propriété 3 :

Etant donné trois points A, B et C et trois réels α, β et γ tels que :

$$\alpha + \beta + \gamma \neq 0 \quad \text{et} \quad \beta + \gamma \neq 0.$$

Si G est le barycentre de (A, α), (B, β) et (C, γ)

et si H est le barycentre de (B, β) et (C, γ)

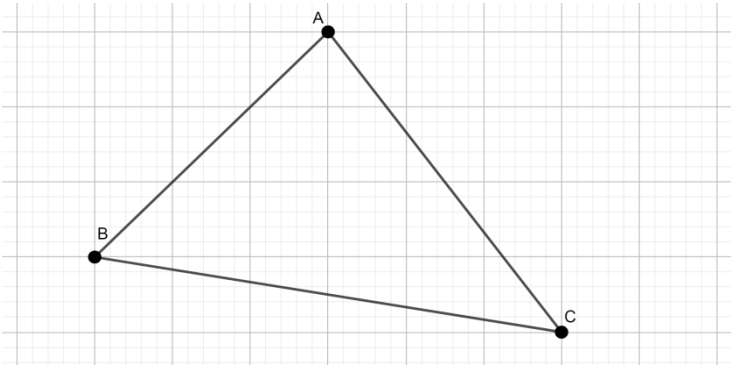
alors G est le barycentre de (A, α) et $(H, \beta + \gamma)$.

On ne change pas le barycentre G d'un système de points pondérés, lorsqu'on remplace plusieurs points pondérés par leur barycentre H affecté de la somme de leurs coefficients.

Exemple 7 :

Application à la construction du barycentre de trois points :

On cherche à construire G, le barycentre de $(A, 1)$, $(B, 2)$ et $(C, 1)$ sur la figure ci-contre :



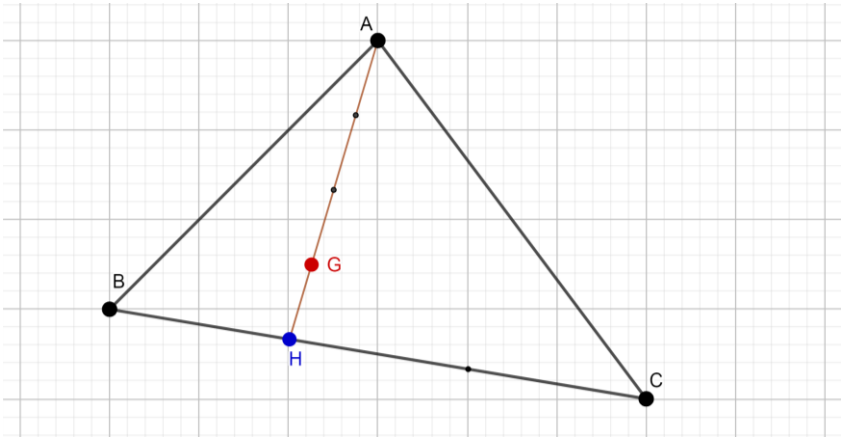
On construit H, le barycentre partiel de $(B,2)$ et $(C,1)$.

D'après la formule de construction du barycentre de deux points, on a : $\overrightarrow{BH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

D'après la propriété d'associativité, on peut remplacer le système $(B,2)$ et $(C,1)$ par $(H,2+1)$.

Donc, G est en fait le barycentre de $(A,1)$ et $(H,3)$.

D'après la formule de construction du barycentre de deux points, on a : $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AH}$



Exemple 8 : ***Application à la construction du barycentre de quatre points :***

$ABCD$ est un parallélogramme.

On cherche à placer le barycentre des points $(A,2)$, $(B,-3)$, $(C,2)$ et $(D,2)$.

Comme les points A, C et D ont le même coefficient, on introduit le point H le barycentre de $(A,2)$, $(C,2)$ et $(D,2)$.

H est alors le centre de gravité du triangle ACD (intersection des médianes).

D'après la propriété d'associativité G est alors le barycentre des points $(H,6)$ et $(B,-3)$, on a alors :

$$\overrightarrow{HG} = \frac{-3}{6-3}\overrightarrow{HB} = -\overrightarrow{HB}$$

On obtient la figure suivante :

