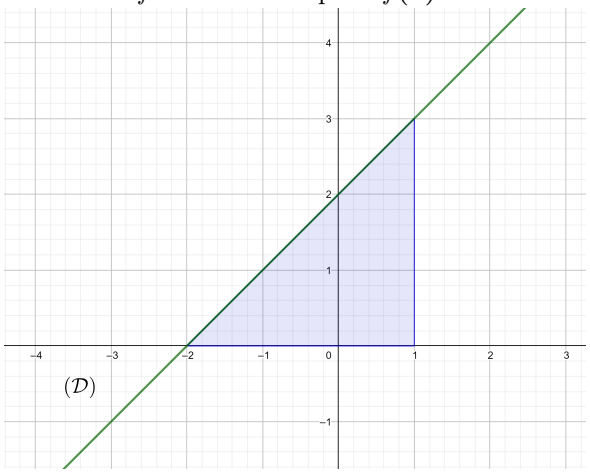
Cours - Calcul intégral

Ce Cours est présenté par le Professeur : Bouyguir Taher

1 Activité

Activité 1 :

On donne ci-dessous $(\mathcal{D})$ la droite représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + 2$.



Soit F et G deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$ et $G(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 5$.

1. Vérifier que F et G sont des primitives de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $F(1) - F(-2)$ puis $G(1) - G(-2)$. Que constatez-vous ?
3. Soient a et b deux réels. Calculer $F(b) - F(a)$ puis $G(b) - G(a)$. Que constatez-vous ?
4. Calculer l'air du domaine délimité par la droite $(\mathcal{D})$, l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = -2$ et $x = 1$ puis comparer le résultat avec celle de la question (2).
5. On désigne par : $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ l'air délimité par la courbe de f ,l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = a$ et $x = b$ et on a :

   $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$; avec F une primitive de f.

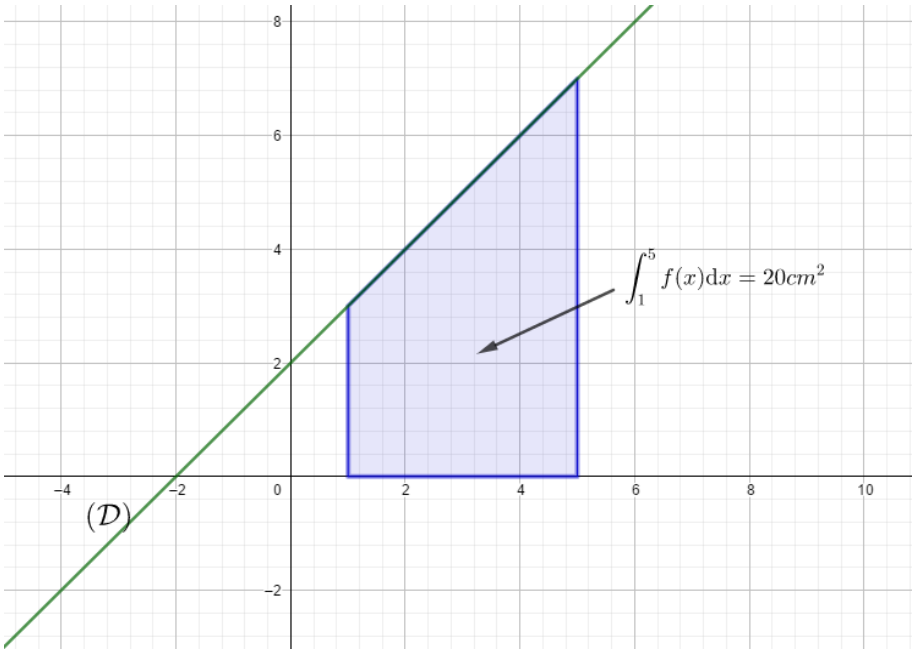
   Calculer $\int_1^5 f(x)\mathrm{d}x$, puis interpréter ce résultat géométriquement .

♠ Solution

1. Vérifier que F et G sont des primitives de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   simple a vérifier il suffit de dériver les deux fonctions :
   $F'(x) = (\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1)' = (\frac{1}{2}x^2)' + (2x)' + 1' = \frac{1}{2} \times 2x + 2 = x + 2 = f(x)$
   $G'(x) = (\frac{1}{2}x^2 + 2x - 5)' = (\frac{1}{2}x^2)' + (2x)' - 5' = \frac{1}{2} \times 2x + 2 = x + 2 = f(x)$
2. Calculer $F(1) - F(-2)$ puis $G(1) - G(-2)$. Que constatez-vous ?
   $F(1) - F(-2) = \frac{1}{2} \times 1^2 + 2 \times 1 + 1 - (\frac{1}{2}(-2)^2 + 2 \times (-2) + 1) = \frac{7}{2} - (-1) = \frac{9}{2}$
   $G(1) - G(-2) = \frac{1}{2} \times 1^2 + 2 \times 1 - 5 - (\frac{1}{2}(-2)^2 + 2 \times (-2) - 5) = \frac{-5}{2} - (-7) = \frac{9}{2}$
   On remarque que $F(1) - F(2) = G(1) - G(2)$
3. Soient a et b deux réels. Calculer $F(b) - F(a)$ puis $G(b) - G(a)$. Que constatez-vous ?
   $F(b) - F(a) = \frac{1}{2} \times b^2 + 2 \times b + 1 - (\frac{1}{2}a^2 + 2 \times a + 1) = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} + 2b - 2a$
   $G(b) - G(a) = \frac{1}{2} \times b^2 + 2 \times b - 5 - (\frac{1}{2}a^2 + 2 \times a - 5) = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} + 2b - 2a$
   On remarque que $F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$
4. Calculer l'air du domaine délimité par la droite $(\mathcal{D})$, l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = -2$ et $x = 0$, puis comparer le résultat avec celle de la question (2).

remarquons que cette l'aire est colorée en bleu dans le graphe ci-dessus, représente un triangle rectangle isocèle ; et on sait que l'aire d'un triangle rectangle est : $S = \frac{base \times hauteur}{2}$, avec $base = 3$ et $hauteur = 3$.
donc $S = \frac{3\times3}{2} = \frac{9}{2}$.
donc en remarquant que $S = \frac{9}{2} = F(1) - F(2) = G(1) - G(2)$

5. Calculer $\int_1^5 f(x)\mathrm{d}x$, puis interpréter ce résultat géométriquement .
D'après ce qui précisant : $\int_1^5 f(x)\mathrm{d}x = F(5) - F(1) = \frac{5^2}{2} - \frac{1^2}{2} + 2\times5 - 2\times1 = 20$,donc l'air du domaine délimité par la droite $(\mathcal{D})$, l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = 1$ et $x = 5$ égale à $20\,cm^2$.



2 Intégrale d'une fonction continue

Définition :

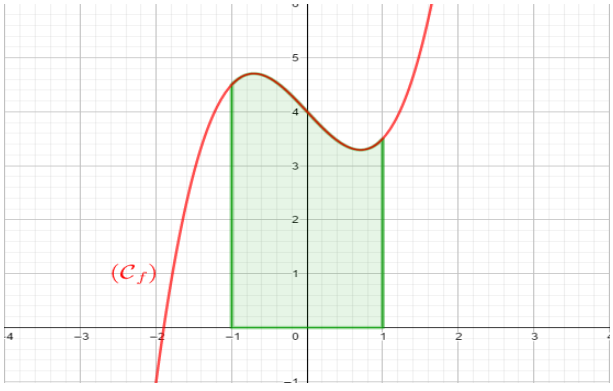
Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ et F une primitive de f sur $[a;b]$. On a :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

Exemple 1

On représente ci-contre $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de la fonction f : $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x + 4$.

1. Décrire le domaine coloré.
2. Déterminer une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
3. En utilisant la définition de l'intégrale, calculer l'aire du domaine coloré.



♠ Solution

1. le domaine coloré dans le graphe ci-dessus est l'air délimité par la courbe $(\mathcal{C}_f)$, l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = -1$ et $x = 1$
2. Déterminer une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   Soit F une primitive de f et $k \in \mathbb{R}$, donc on a $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2} \times \frac{1}{2}x^2 + 4x + k = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{4}x^2 + 4x + k$.
   $$F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{4}x^2 + 4x + k\,;\ (k \in \mathbb{R})$$
3. En utilisant la définition de l'intégrale, calculer l'aire du domaine coloré.
   l'aire du domaine coloré égale à : $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x$ et on a :
   $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = F(1) - F(-1) = \frac{1}{4}1^4 - \frac{3}{4}1^2 + 4 \times 1 + k - (\frac{1}{4}(-1)^4 - \frac{3}{4}(-1)^2 + 4 \times (-1) + k) = 8$

Exemple 2

Calculer les intégrales suivantes :

a) $\int_{-1}^{2}(x^2 - 4x + 3)\mathrm{d}x$ b) $\int_{0}^{3}(2x^3 - 4x^2 - 5)\mathrm{d}x$ c) $\int_{-1}^{3}(\frac{1}{3}x^4 - x + 7)\mathrm{d}x$

♠ Solution

1. Calculons $\int_{-1}^{2}(x^2 - 4x + 3)\mathrm{d}x$:
   La fonction polynôme $f : x \longmapsto x^2 - 4x + 3$ est continue sur $\mathbb{R}$ en particulier sur l'intervalle $[-1;2]$.
   D'autre part : $x \longmapsto \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x$ est une primitive de la fonction f ,donc :
   $$\int_{-1}^{2}(x^2 - 4x + 3)\mathrm{d}x = [\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x]_{-1}^{2} = (\frac{2^3}{3} - 22^2 + 3 \times 2) - (-\frac{1}{3} - 2 - 3) = 6$$

♠ en utilisant la même méthode calculer les deux intégrales restantes (à faire !)

Remarque

- Pour toute fonction f continue en a : $\int_{a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = F(a) - F(a) = 0$
- Pour toute fonction f continue en $[a;b]$: $\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = -\int_{b}^{a} f(x)\mathrm{d}x$

3 Propriétés de l'intégrale

Propriétés

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a;b]$ et k un réel constant, Alors

a) $\int_{a}^{b}(f+g)(x)\mathrm{d}x = \int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x + \int_{a}^{b} g(x)\mathrm{d}x$ b) $\int_{a}^{b} kf(x)\mathrm{d}x = k\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x$

Exemple

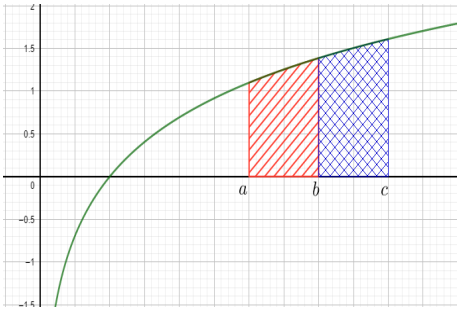
f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[0;1]$ telles que : $\int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$ et $\int_{0}^{1} g(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$. on a

$$\int_{0}^{1}(5f - 3g)(x)\mathrm{d}x = 5\int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x - 3\int_{0}^{1} g(x)\mathrm{d}x = \frac{5}{3} - \frac{3}{2} = \frac{1}{6}$$

Propriété : Relation de Chasles

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a ,b et c trois réels appartenant à I, Alors

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x$$



Exemple

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = |x-2|$.

Calculons $I = \int_0^5 f(x)\mathrm{d}x$.

On note d'abord que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, en particulier sur $[0;5]$. D'autre part, le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $[0;5]$ est donné par le tableau suivant :

x	0		2		5
$x-2$		$-$	0	$+$	
$\lvert x-2\rvert$		$-x+2$	0	$x-2$	

En utilisant ainsi la relation de Chasles , on trouve :

$$I = \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x + \int_2^5 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^2 (-x+2)\mathrm{d}x + \int_2^5 (x-2)\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^2}{2}+2x\right]_0^2 + \left[\frac{x^2}{2}-2x\right]_2^5 =$$
$$(-2+4) + \left(\frac{25}{2} - 10 - 2 + 4\right) = \frac{13}{2}$$

♠ en utilisant la même méthode calculer : à faire !

a) $\int_0^3 |x-1|\,\mathrm{d}x$ b) $\int_{-2}^9 |-x+8|\,\mathrm{d}x$ c) $\int_0^6 |x-4|\,(x-1)\mathrm{d}x$

Propriété : Intégrales et inégalités

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a;b]$, Alors :

- si f est positive sur $[a;b]$, alors $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$
- si pour tout $x \in [a;b]$, $f(x) \leqslant g(x)$,alors : $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$

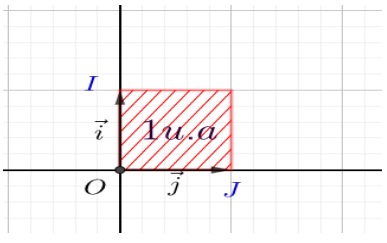
4 Interprétation géométrique d'une intégrale

Définition :

Soit $(O;\vec{i},\vec{j})$ un repère orthogonal du plan .

On note I et J les points tels que $\vec{OI} = \vec{i}$ et $\vec{OJ} = \vec{j}$.

L'unité d'aire, que l'on note $u\cdot a$,est l'aire de rectangle dont O,I et J forment trois sommets.

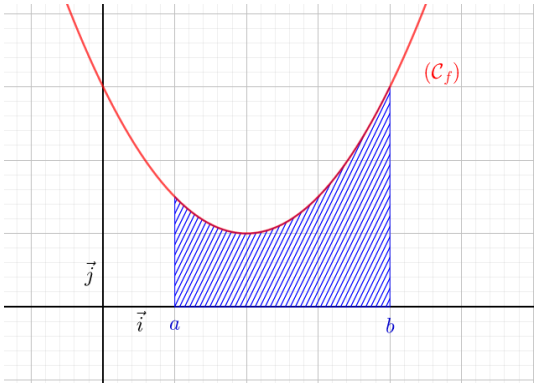


Propriété : Notion de l'intégrale

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$ de la courbe représentative $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$

L'aire A, exprimée en unité d'aire du domaine situé entre la courbe $(\mathcal{C}_f)$, l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = a$ et $x = b$, est égal à l'intégrale de a à b de f :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = A(u\cdot a)$$



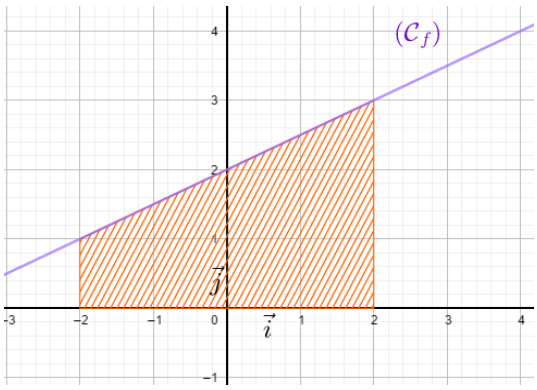
Exemple

f est la fonction définie sur $[-2;2]$ par : $f(x) = \frac{x}{2} + 2$. Le domaine colorié est un trapèze dont l'aire est :

$$\int_{-2}^{2} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1+3}{2} \times 4 = 8(u\cdot a)$$

Les unités graphiques étant $1cm$ pour l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées .

$1(u\cdot a)$ représente $1cm^2$ et donc l'aire colorée représente $8cm^2$



Propriété : Calcul pratique d'une intégrale

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ et F une primitive de f sur $[a;b]$. Alors :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a) \text{ que l'on note } [F(x)]_a^b \ .$$

Exemple

Calculons l'intégrale suivante : $\int_1^2 e^{2x}\mathrm{d}x$

la fonction $x \longmapsto e^{2x}$ est continue sur $\mathbb{R}$ (composée de deux fonctions continues), en particulier sur l'intervalle $[1;2]$ donc :

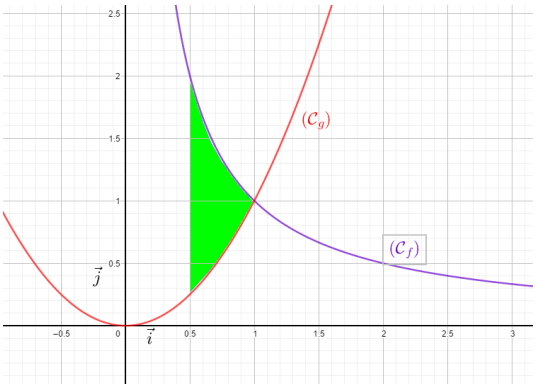
$$\int_1^2 e^{2x}\mathrm{d}x = \left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_1^2 = \frac{e^4}{2} - \frac{e^2}{2} = \frac{e^4 - e^2}{2}$$

♠ de même calculer les intégrales suivantes à faire !

a) $\int_{-5}^{3} 3e^{3x}\mathrm{d}x$ b) $\int_0^1 2xe^{3x^2}\mathrm{d}x$ c) $\int_{-1}^{3} 3x^2 + \frac{1}{x} - x\mathrm{d}x$

Exercice d'application

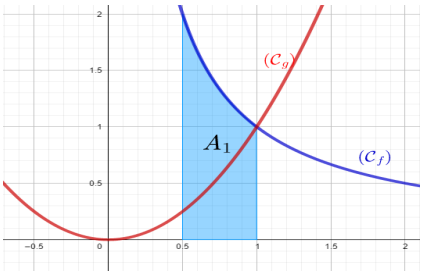
Dans le graphe ci-contre,$(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ représentent respectivement les fonctions f et g définies par : $f(x)=\frac{1}{x}$ et $g(x)=x^2$
On se propose de calculer l'aire A de la partie du plan délimitée par les courbes $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ et les deux droites d'équations $x=\frac{1}{2}$ et $x=1$.



1. Calculer A_1 l'aire du domaine délimité par la courbe $(\mathcal{C}_f)$, l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x=\frac{1}{2}$ et $x=1$.
2. Calculer A_2 l'aire du domaine délimité par la courbe $(\mathcal{C}_g)$, l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x=\frac{1}{2}$ et $x=1$.
3. En déduire que la valeur de A et la comparer avec
$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}|f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x$$

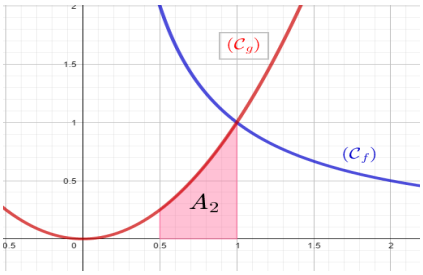
♠ Solution

1. Calculons A_1 l'aire du domaine délimité par la courbe $(\mathcal{C}_f)$, l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x=\frac{1}{2}$ et $x=1$ (voir le figure ci-dessous), d'après la propriété *Notion d'intégrale* on a



$$A_1=\int_{\frac{1}{2}}^{1}f(x)\mathrm{d}x=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=[ln(x)]_{0.5}^{1}=ln(1)-ln(0.5)=0.69$$

2. Calculons A_2 l'aire du domaine délimité par la courbe $(\mathcal{C}_g)$, l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x=\frac{1}{2}$ et $x=1$ (voir le figure ci-contre), d'après la propriété *Notion d'intégrale* on a



$$A_2=\int_{\frac{1}{2}}^{1}g(x)\mathrm{d}x=\int_{\frac{1}{2}}^{1}x^2\mathrm{d}x=\left[\frac{x^3}{3}\right]_{0.5}^{1}=\frac{1^3}{3}-\frac{0.5^3}{3}=0.29.$$

3. D'après les figures ci-dessus, il est claire que $A=A_1-A_2=0.69-0.29=0.4$.
Calculons maintenant : $\int_{\frac{1}{2}}^{1}|f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x$, dans l'intervalle $[0.5;1]$ d'après la représentation graphique du f et g , $(\mathcal{C}_f)$ est au-dessus de $(\mathcal{C}_g)$ donc dans l'intervalle $[0.5;1]$ $f(x)\geq g(x)$ alors
$\int_{\frac{1}{2}}^{1}|f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x=\int_{\frac{1}{2}}^{1}f(x)-g(x)\mathrm{d}x=\int_{\frac{1}{2}}^{1}f(x)\mathrm{d}x-\int_{\frac{1}{2}}^{1}g(x)\mathrm{d}x=A_1-A_2=A=0.4$

5 La valeur moyenne

Propriété : La valeur moyenne

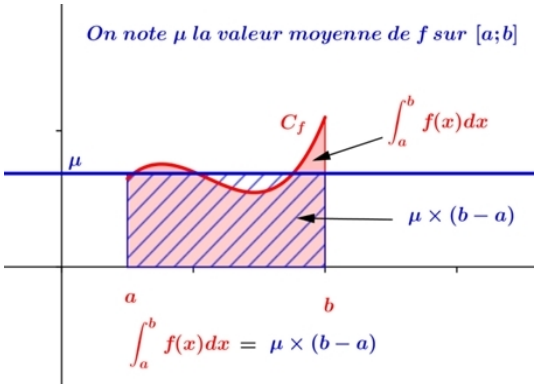
Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ avec $a<b$.

▸ La valeur moyenne de f sur $[a;b]$ est le nombre μ défini par :

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

▸ Il existe un élément c de $[a;b]$ tel que :

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$



Exemple

1. Calculons la valeur moyenne μ de la fonction $x \longmapsto \frac{ln(x)}{x}$ sur $[1;e]$

$$\text{On a : } \mu = \frac{1}{e-1}\int_1^e \frac{ln(x)}{x}\mathrm{d}x = \frac{1}{e-1}\left[\frac{ln^2(x)}{2}\right]_1^e = \frac{1}{e-1}\left(\frac{ln^2(e)}{2} - \frac{ln^2(1)}{2}\right) = \frac{1}{2(e-1)}.$$

2. Calculons la valeur moyenne μ de la fonction $x \longmapsto x^2+1$ sur $[0;2]$

$$\text{On a : } \mu = \frac{1}{2-0}\int_0^2 x^2+1\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}+x\right]_0^2 = \frac{1}{2}(\frac{14}{3}) = \frac{7}{3}$$

♠ de même calculer la valeur moyenne des fonctions suivantes : à faire !

a) $f(x) = x^2+3x-e^x$ b) $g(x) = \frac{1}{x} - 2xe^{x^2}$ c) $h(x) = x^3+x^2-\frac{1}{x}+e^{2x}$

6 Intégration par parties

On suppose que toutes les fonctions utilisées ont des primitives sur les intervalles considérés.

Parfois on n'arrive pas à calculer directement une intégrale. Par exemple $\int_0^{100} xln(x)\mathrm{d}x$.

il existe une méthode dite intégration par parties qui peut - en général -

permettre de calculer tout de même ce type de l'intégrale

Théorème

Soient u et v deux fonctions dérivables à dérivées continues sur un intervalle $[a;b]$, alors :

$$\int_a^b u(x)\times v'(x)\mathrm{d}x = [u(x)\times v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)\times v(x)\mathrm{d}x$$

Exemple

1. Calculons l'intégrale suivante : $I = \int_0^2 (x-1)e^x\mathrm{d}x$, par parties.

Les fonctions $x \longmapsto x-1$ et $x \longmapsto e^x$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ à dérivées continues, en particulier sur $[0;2]$.

Posons $u(x) = x-1$ et $v'(x) = e^x$, donc $u'(x) = 1$ et $v(x) = e^x$. on a :

$$I = [u(x)\times v(x)]_0^2 - \int_0^2 u'(x)\times v(x)\mathrm{d}x = [(x-1)e^x]_0^2 - \int_0^2 e^x\mathrm{d}x = [(x-1)e^x]_0^2 - [e^x]_0^2 = 2$$

2. Calculons l'intégrale suivante : $J = \int_1^e ln(x)\mathrm{d}x$, par parties.

   Les fonctions $x \longmapsto ln(x)$ et $x \longmapsto 1$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ à dérivées continues, en particulier sur $[1;e]$.

   Posons $u(x) = ln(x)$ et $v'(x) = 1$, donc $u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v(x) = x$. on a :

$$I = [u(x) \times v(x)]_1^e - \int_1^e u'(x) \times v(x)\mathrm{d}x = [xln(x)]_1^e - \int_1^e 1\mathrm{d}x = [xln(x)]_1^e - [x]_1^e = 1$$

Exercice d'application

Calculez les intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par parties : à faire !

a) $\int_0^2 xe^x\mathrm{d}x$ b) $\int_0^1 ln(x+2)\mathrm{d}x$ c) $\int_0^2 x^2ln(x)\mathrm{d}x$

d) $\int_0^1 xln^2(x)\mathrm{d}x$ e) $\int_1^3 xln(x)\mathrm{d}x$ f) $\int_1^3 (x+\frac{1}{2})ln(x)\mathrm{d}x$

g) $\int_1^e (x-1)e^{2x+3}\mathrm{d}x$ h) $\int_{-1}^0 (3x+1)e^{3x+2}\mathrm{d}x$ i) $\int_2^4 e^xln(x)\mathrm{d}x$

j) $\int_1^e \frac{ln(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$