Chapitre 10

Calcul intégral

Niveau : 2ème Année Bac

PC & SVT

MATHEMATIQUES

~Prof : Bouyguir Taher~

Contenu du chapitre 10

I. Intégrale d'une fonction continue 2

1. Notion d'intégrale 2
2. Propriétés de l'intégrale 3
3. Intégrales et inégalités 4
4. Valeur moyenne 5

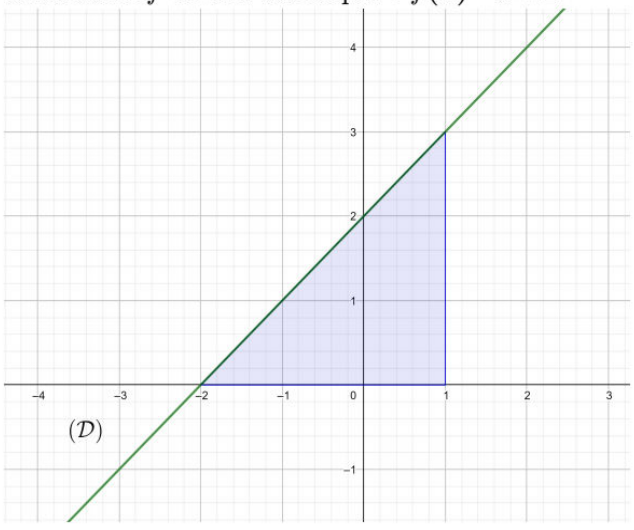
II. Intégration par parties 6

III. Calculs d'aires 7

1. Unité d'aire 7
2. Calculs d'aires 7
   - 2.1. Cas d'une fonction continue positive 7
   - 2.2. Cas d'une fonction continue négative 8
   - 2.3. Cas d'une fonction continue changeant de signe 8
   - 2.4. Calcul de l'aire située entre deux courbes 10

Activité :

On donne ci-dessous $(\mathcal{D})$ la droite représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + 2$.



Soit F et G deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$ et $G(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 5$.

1. Vérifier que F et G sont des primitives de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $F(1) - F(-2)$ puis $G(1) - G(-2)$. Que constatez-vous ?
3. Soient a et b deux réels. Calculer $F(b) - F(a)$ puis $G(b) - G(a)$. Que constatez-vous ?
4. Calculer l'air du domaine délimité par la droite $(\mathcal{D})$, l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = -2$ et $x = 1$ puis comparer le résultat avec celle de la question (2).
5. On désigne par : $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ l'air délimité par la courbe de f ,l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = a$ et $x = b$ et on a :

   $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$; avec F une primitive de f.

   Calculer $\int_1^5 f(x)\mathrm{d}x$, puis interpréter ce résultat géométriquement .

I. Intégrale d'une fonction continue

1. Notion d'intégrale

Définition :

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$, et F une de ses primitives sur $[a; b]$.

➢ Le réel $F(b) - F(a)$ est appelé **intégrale de f de a à b** et on le note $\int_a^b f(x)\,dx$.

On écrit : $\boldsymbol{\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)}$.

$\int_a^b f(x)\,dx$ se lit : " somme ou intégrale de a à b de $f(x)dx$ ".

➢ Les réels a et b sont appelés les **bornes** de l'intégrale :
a est la **borne inférieure** et b la **borne supérieure**.

Exemples :

❋ Calculons l'intégrale suivante : $\int_1^3 2x\,dx$

$$\int_1^3 2x\,dx = [x^2]_1^3 = 3^2 - 1^2 = 9 - 1 = 8$$

❋ Calculons l'intégrale suivante : $\int_5^9 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$

$$\int_5^9 \frac{1}{\sqrt{t}}dt = \left[2\sqrt{t}\,\right]_5^9 = 2\sqrt{9} - 2\sqrt{5} = 6 - 2\sqrt{5}$$

❋ Calculons l'intégrale suivante : $\int_{-1}^0 \frac{2}{2x+3}dx$

$$\int_{-1}^0 \frac{2}{2x+3}dx = \int_{-1}^0 \frac{(2x+3)'}{2x+3}dx = [\ln(2x+3)]_{-1}^0 = \ln(0+3) - \ln(-2+3) = \ln(3)$$

Remarques :

➢ L'ordre de a et b est important.

➢ La variable " x " est dite « muette », c'est à dire qu'elle n'est plus présente lorsque le calcul est effectué. On peut la remplacer par : t, u, ou toute autre lettre à l'exception de a et b, sans que la signification ni la valeur de l'intégrale changent :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(u)\,du = \cdots$$

2. Propriétés de l'intégrale

Propriétés :

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a;b]$ et k et c deux réels avec $c \in [a;b]$.

- $\int_a^a f(x)\,dx = 0$
- $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$
- ***Relation de Chasles :*** $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$
- ***Linéarité :***
  - $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$
  - $\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

Exemple 1 :

f et g sont deux fonctions continues sur l'intervalle $[2;5]$ telles que :

$$\int_2^5 f(x)\,dx = 1 \quad \text{et} \quad \int_5^2 g(x)\,dx = 4$$

Calculons $\int_2^5 \big(7f(x)+3g(x)\big)\,dx$

On a : $\int_2^5 \big(7f(x)+3g(x)\big)\,dx = \int_2^5 7f(x)\,dx + \int_2^5 3g(x)\,dx$

$$= 7\int_2^5 f(x)\,dx - 3\int_5^2 g(x)\,dx$$

$$= 7\times 1 - 3\times 4 = -5$$

Exemple 2 :

Calculons l'intégrale suivante : $\int_{-1}^{2} |6-2x|\,dx$

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$6-2x$		$+$	0	$-$	
$\lvert 6-2x\rvert$	$6-2x$		0		$-6+2x$

Donc : $\int_0^7 |6-2x|\,dx = \int_0^3 |6-2x|\,dx + \int_3^7 |6-2x|\,dx$

$= \int_0^3 (6-2x)\,dx + \int_3^7 (-6+2x)\,dx$

$= [6x-x^2]_0^3 + [-6x+x^2]_3^7$

$= (18-9) - 0 + (-42+49) - (-18+9) = 25$

Exercice 1 :

Calculer les intégrales suivantes :

$\int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx$ $\quad$ $\int_0^{\ln 3} e^{2x}\,dx$ $\quad$ $\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos x\,dx$

$\int_{e^2}^{e^4} \frac{\ln x}{x}\,dx$ $\quad$ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$ $\quad$ $\int_{-2}^3 |x^2-1|\,dx$

Exercice 2 :

On pose : $I = \int_0^{\ln 16} \frac{e^x+3}{e^x+4}\,dx$ et $J = \int_0^{\ln 16} \frac{1}{e^x+4}\,dx$

1. Vérifier que : $I + J = 4\ln 2$ et $I - 3J = 2\ln 2$.

2. En déduire les valeurs de I et J.

3. Intégrales et inégalités

Propriété :

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a;b]$.

- Si pour tout x de $[a;b]$: $f(x) \geq 0$, alors : $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$
- Si pour tout x de $[a;b]$: $f(x) \leq g(x)$, alors : $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$
- $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$

Exercice résolu :

1. Montrer que : $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx \geq 0$

2. Montrer que : $\frac{1}{e} \leq \int_0^1 e^{-x^2}\,dx \leq 1$

Solution :

1. On a pour tout x de $[0;1]$: $e^{-x^2} \geq 0$ et $0 \leq 1$, donc : $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx \geq 0$

2. On encadre la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ sur $[0;1]$.

On a : $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x^2 \leq 1$

$\Rightarrow -1 \leq -x^2 \leq 0$

$\Rightarrow e^{-1} \leq e^{-x^2} \leq 1$

$\Rightarrow \int_0^1 e^{-1}\,dx \leq \int_0^1 e^{-x^2}\,dx \leq \int_0^1 1\,dx$

$\Rightarrow [e^{-1}x]_0^1 \leq \int_0^1 e^{-x^2}\,dx \leq [x]_0^1$

$\Rightarrow e^{-1} - 0 \leq \int_0^1 e^{-x^2}\,dx \leq 1 - 0$

$\Rightarrow \frac{1}{e} \leq \int_0^1 e^{-x^2}\,dx \leq 1$

Exercice 3 :

1. Montrer que : $\int_1^2 \ln(x^2+1)dx \geq 0$.

2. Montrer que : $2 \leq \int_1^9 \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx \leq 4$.

3. Comparer les intégrales : $\int_{\frac{1}{2}}^1 x\ln(x)dx$ et $\int_{\frac{1}{2}}^1 x^2\ln(x)dx$.

4. Valeur moyenne

Propriété et définition :

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ avec $a < b$.

Il existe au moins un réel c dans $[a;b]$ tel que :

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Le réel $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ s'appelle la **valeur moyenne** de f sur $[a;b]$.

Exemple 3 :

Calculons m la valeur moyenne de la fonction $x \mapsto e^{2x}$ sur $[0;1]$.

$$m = \frac{1}{1-0}\int_0^1 e^{2x}\,dx = 1\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}e^0 = \frac{e^2-1}{2}$$

Exercice 4 :

On considére la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$.

Déterminer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[1;7]$.

II. Intégration par parties

Propriété :

Soit I un intervalle et soit a et b deux éléments de I.

Si u et v sont deux fonctions dérivables sur I de dérivées continues sur I, alors :

$$\int_a^b \big(u(x) \times v'(x)\big)\,dx = [u(x) \times v(x)]_a^b - \int_a^b \big(u'(x) \times v(x)\big)\,dx$$

Exemple 1 :

Calculons l'intégrale suivante : $\int_0^1 xe^x\,dx$

On pose $u(x) = x$ et $v'(x) = e^x$, donc $u'(x) = 1$ et $v(x) = e^x$

Alors $\int_0^1 xe^x\,dx = [x \times e^x]_0^1 - \int_0^1 1 \times e^x\,dx$

Alors $\int_0^1 xe^x\,dx = 1e^1 - 0e^0 - \int_0^1 e^x\,dx$

D'où $\int_0^1 xe^x\,dx = e - [e^x]_0^1 = e - (e^1 - e^0) = 1$

Exemple 2 :

Calculons l'intégrale suivante : $\int_1^e \ln x\,dx$

On a : $\int_1^e \ln x\,dx = \int_1^e 1 \times \ln x\,dx$

On pose $u(x) = \ln x$ et $v'(x) = 1$, donc $u'(x) = \dfrac{1}{x}$ et $v(x) = x$

Alors $\int_1^e \ln x\,dx = \int_1^e 1 \times \ln x\,dx = [x \times \ln x]_1^e - \int_1^e \dfrac{1}{x} \times x\,dx$

Alors $\int_1^e \ln x\,dx = e\ln e - 1\ln 1 - \int_1^e 1\,dx$

D'où $\int_1^e \ln x\,dx = e \times 1 - 1 \times 0 - [x]_1^e = e - (e-1) = 1$

Remarques :

- Avec l'intégration par parties on peut alors calculer des intégrales portant sur des fonctions dont on ne peut pas facilement déterminer une primitive.
- Cas des fonctions de la forme $P(x) \times e^x$:
  On prend $u(x) = P(x)$ et $v'(x) = e^x$, où P est un polynôme.
- Cas des fonctions de la forme $P(x) \times \ln x$:
  On prend $u(x) = \ln x$ et $v'(x) = P(x)$, où P est un polynôme.

Exercice 5 :

Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par parties :

$$I_1 = \int_0^2 (x-1)e^x\,dx \quad ; \quad I_2 = \int_1^2 x^2 \ln x\,dx \quad ; \quad I_3 = \int_1^9 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$$

III. Calculs d'aires

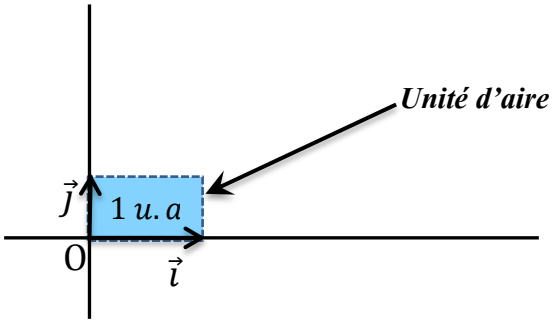
Dans cette partie, on considère une fonction f continue sur un intervalle $[a; b]$; et on note (C_f) sa courbe dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

1. Unité d'aire

Définition :

L'unité d'aire (notée ***u.a***) est l'aire du rectangle défini par les unités des axes.

$$1\ u.a = \|\vec{\imath}\| \times \|\vec{\jmath}\|$$



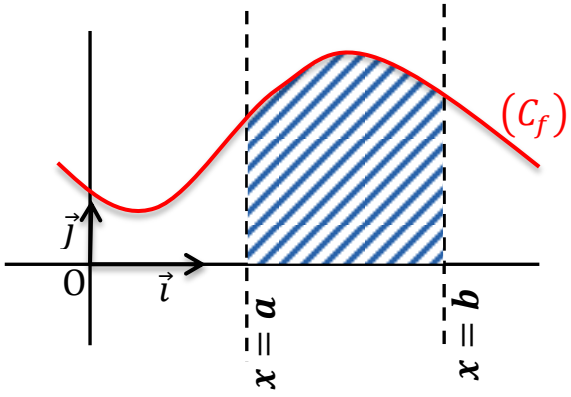
2. Calculs d'aires

2.1. Cas d'une fonction continue positive

Propriété 1 :

Soit f une fonction continue et **positive** sur un intervalle $[a; b]$.
L'aire de la partie du plan délimitée par l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ et la courbe (C_f) est égale à :

$$\mathcal{A} = \int_a^b f(x)\,dx \ \ u.a$$



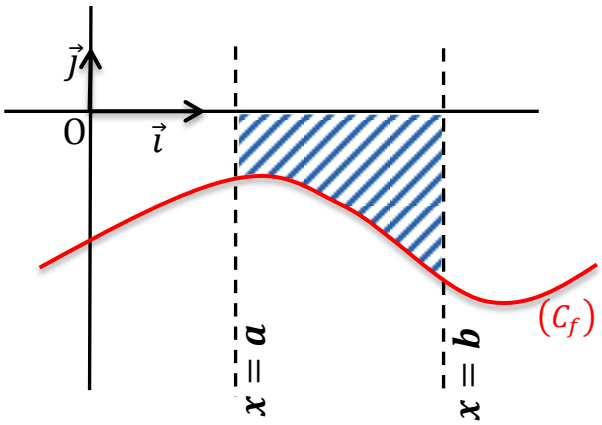
2.2. Cas d'une fonction continue négative

Propriété 2 :

Soit f une fonction continue et **négative** sur un intervalle $[a; b]$.

L'aire de la partie du plan délimitée par l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ et la courbe (C_f) est égale à :

$$\mathcal{A} = \int_a^b (-f(x))\,dx \;\; u.a$$



2.3. Cas d'une fonction continue changeant de signe

On se ramène aux cas précédents en découpant l'intervalle $[a; b]$ en sous-intervalles sur lesquels la fonction garde un signe constant.

Exemple 1 :

Calculons $\mathcal{A}_1$ l'aire de la partie du plan comprise entre (C_f) la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto 1 - \frac{1}{x}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = e$.

Puisque : $\forall x \in [1; e]$: $1 - \frac{1}{x} \geq 0$

Alors : $\mathcal{A}_1 = \int_1^e f(x)\,dx \;\; u.a$

Or : $\int_1^e f(x)\,dx = \int_1^e \left(1 - \frac{1}{x}\right) dx$

$= [x - \ln x]_1^e$

$= (e - \ln e) - (1 - \ln 1)$

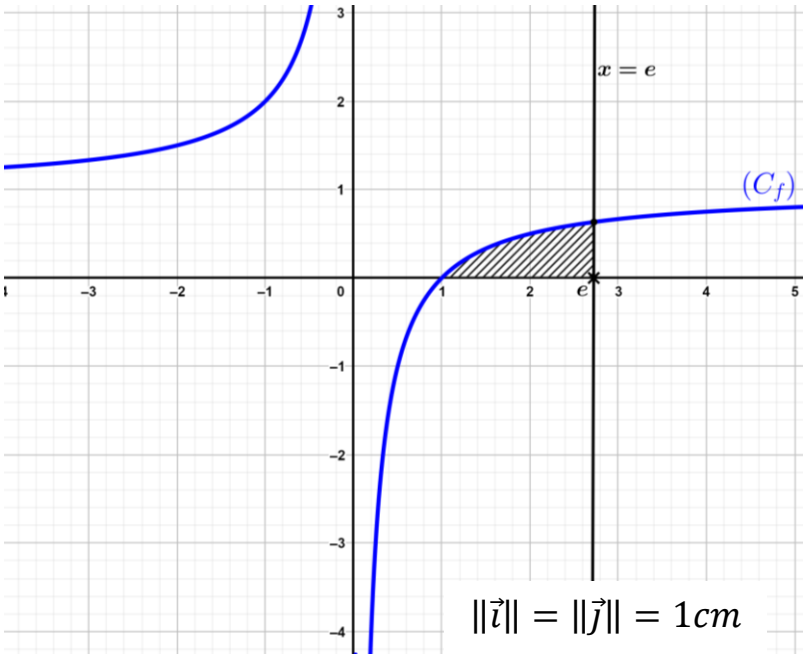
$= e - 2$

donc : $\mathcal{A}_1 = (e - 2) \;\; u.a$

$= (e - 2) \times \|\vec{\imath}\| \times \|\vec{\jmath}\|$

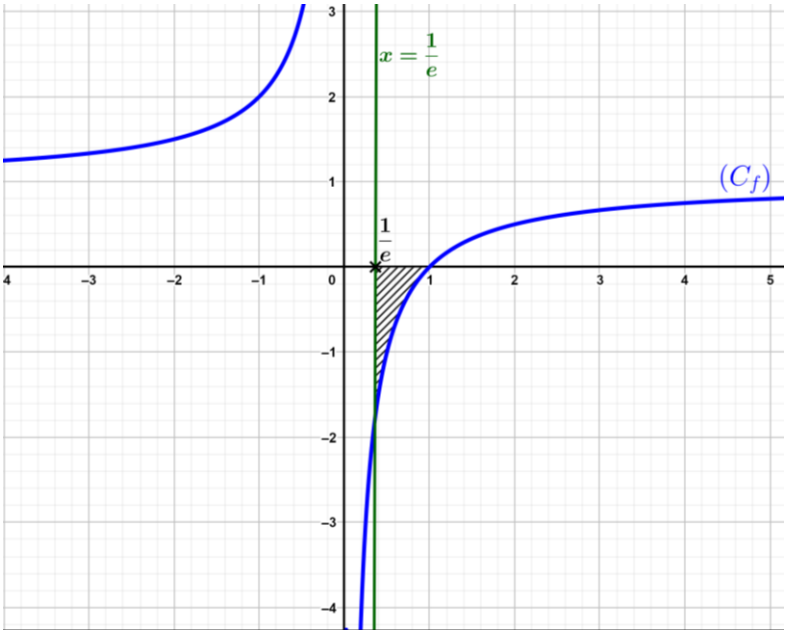
$= (e - 2) \;\times 1cm \times 1cm$

$= (e - 2)\; cm^2$



Exemple 2 :

Calculons $\mathcal{A}_2$ l'aire de la partie du plan comprise entre (C_f) la courbe représentative de la fonction $f: x \mapsto 1 - \frac{1}{x}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = \frac{1}{e}$.



Puisque : $\forall x \in \left[\frac{1}{e}; 1\right]$: $1 - \frac{1}{x} \leq 0$

Alors : $\mathcal{A}_2 = \int_{\frac{1}{e}}^{1} \left(-f(x)\right) dx \ \ u.a$

Or : $\int_{\frac{1}{e}}^{1} -f(x)\, dx = \int_{\frac{1}{e}}^{1} \left(-1 + \frac{1}{x}\right) dx$

$= [-x + \ln x]_{\frac{1}{e}}^{1}$

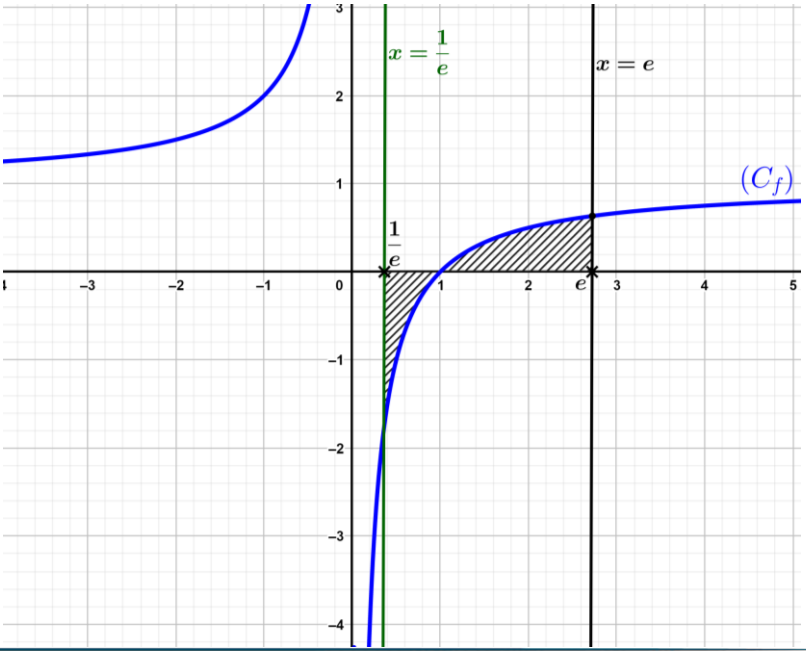
$= (-1 + \ln 1) - \left(-\frac{1}{e} + \ln\frac{1}{e}\right)$

$= -1 - \left(-\frac{1}{e} - 1\right) = \frac{1}{e}$

donc : $\mathcal{A}_2 = \frac{1}{e}\ u.a = \frac{1}{e}\ cm^2$

Exemple 3 :

Calculons $\mathcal{A}_3$ l'aire de la partie du plan comprise entre (C_f) la courbe représentative de la fonction $f: x \mapsto 1 - \frac{1}{x}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = \frac{1}{e}$ et $x = e$.



On a : $\mathcal{A}_3 = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$

Donc : $\mathcal{A}_3 = (e - 2)\ cm^2 + \frac{1}{e} cm^2$

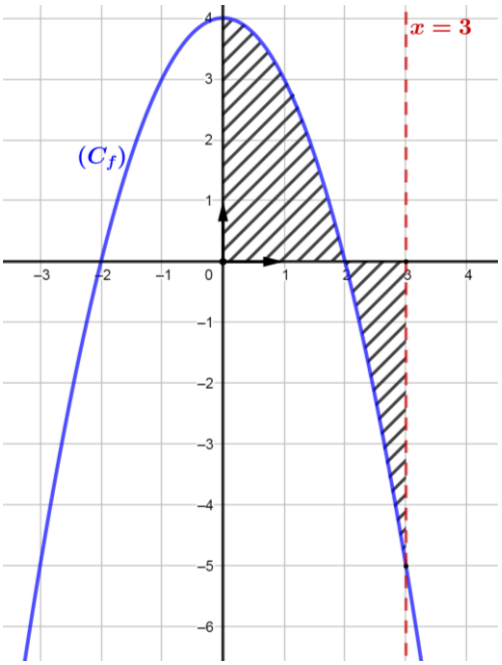
$= \left(e + \frac{1}{e} - 2\right)\ cm^2$

Exercice 6 :

Dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ avec $\|\vec{\imath}\| = 1cm$, on considère la parabole (C_f) représentant la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 4 - x^2$$

Calculer l'aire $\mathcal{A}$ en cm^2 du domaine du plan délimitée par la courbe (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 3$.



2.4. Calcul de l'aire située entre deux courbes

Propriété 3 :

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a;b]$.
L'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C_f), la courbe (C_g) et les deux droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est égale à :

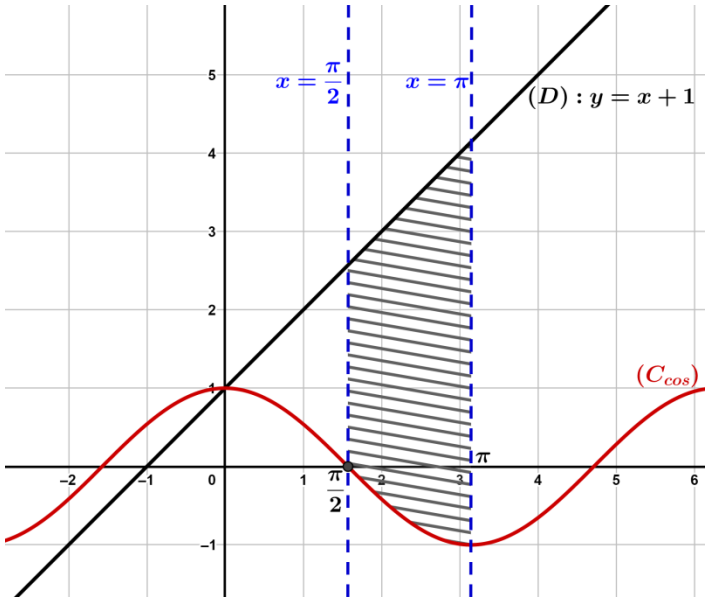
$$\int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx \ \ u.a$$

Exercice 7 :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ avec $\|\vec{\imath}\| = 1cm$.

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \cos x$ et (D) la droite d'équation $y = x + 1$.

Calculer l'aire du domaine hachuré dans la figure ci-contre.



Exercice 8 :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ avec $\|\vec{\imath}\| = 2cm$.
Soit f et g les fonctions définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x) = x^2$ et $g(x) = \sqrt{x}$.

1. Tracer les courbes (C_f) et (C_g) dans le repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.
2. Calculer, en cm^2, l'aire du domaine délimité par (C_f) et (C_g) et les deux droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$.

IV. Calcul de volumes

L'espace est muni d'un repère orthogonal $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$.

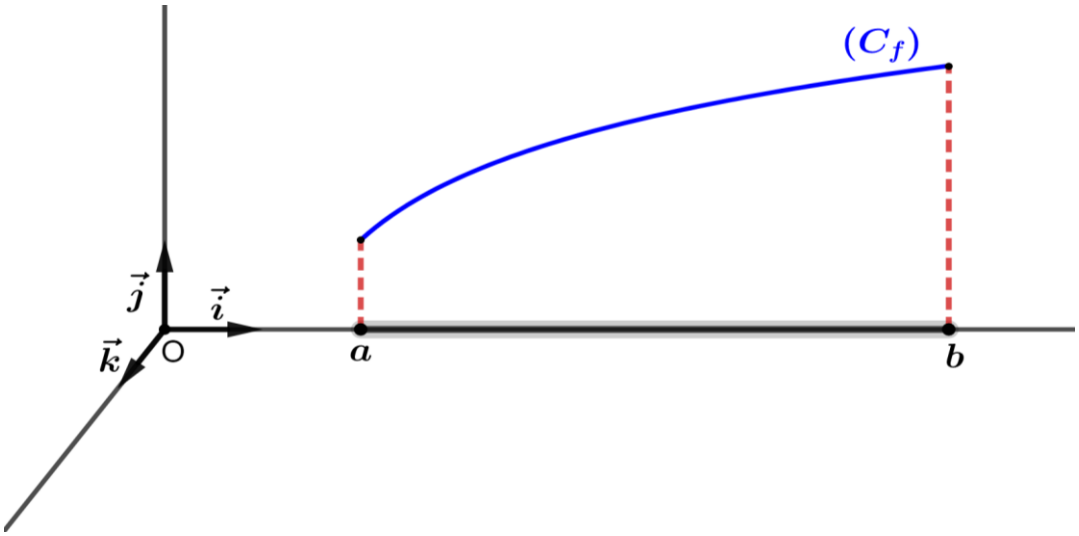
On appelle unité de volume notée $\boldsymbol{u.v}$ le nombre $\|\vec{\imath}\| \times \|\vec{\jmath}\| \times \|\vec{k}\|$.

Propriété :

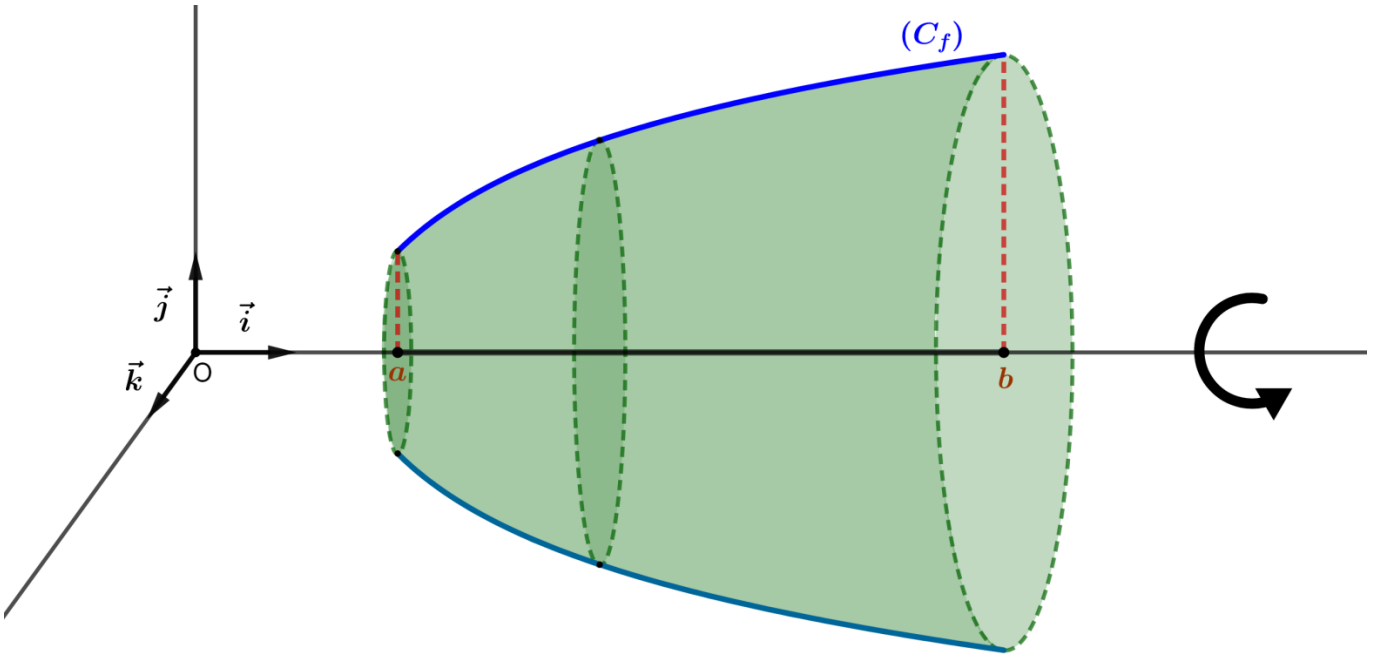
Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$, et (C_f) sa courbe représentative dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Le volume du solide engendré par la rotation de la courbe (C_f) autour de l'axe des abscisses un tour complet sur $[a,b]$ est égale à :

$$\boldsymbol{\mathcal{V} = \pi \int_a^b (f(x))^2\, dx\, u.v}$$

Courbe :



Solide de révolution engendré par cette courbe :



Exemple :

Calculons le volume du solide engendré par la rotation de la courbe de la fonction $x \mapsto \sin(x)$ autour de l'axe des abscisses un tour complet sur l'intervalle $[0;\pi]$.

On a : $\int_0^{\pi} \sin^2(x)\,dx = \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)\right) dx$

$$= \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x)\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2}\pi - 0 = \frac{\pi}{2}$$

Donc le volume demandé est : $\mathcal{V} = \pi \int_0^{\pi} \sin^2(x)\,dx\; u.v = \frac{\pi^2}{2} \times \|\vec{\imath}\| \times \|\vec{\jmath}\| \times \|\vec{k}\|$

Exercice 1 :

Soit g la fonction numérique définie sur $[0;1]$ par : $g(x) = \sqrt{x}e^{\frac{1}{2}x}$.

Calculer le volume du solide engendré par la rotation de la courbe de la fonction g autour de l'axe des abscisses un tour complet.

Exercice 2 :

On se place dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$ de l'espace d'unité $\|\vec{\imath}\| = 1cm$.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[\ln 2;\ln 5]$ par : $f(x) = e^x$, et (C_f) sa courbe représentative dans le repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

1. Calculer, en cm^2, l'aire du domaine $\mathcal{D}$ délimité par (C_f), l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = \ln 2$ et $x = \ln 5$
2. Calculer, en cm^3, le volume du solide de révolution engendré par la rotation de $\mathcal{D}$ autour de l'axe des abscisses un tour complet.