Calcul trigonométrique

I. Rappel

☞Activité

1) Définir un cercle trigonométrique.
2) Soit (C) un cercle trigonométrique et$(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$un repère orthonormé direct lié au (C)Soit M un point de (C) d'abscisse curviligne $\frac{17\pi}{3}$
   a) Déterminer la valeur de α et k sachant que $-\pi < \alpha \leq \pi$ et $k \in \mathbb{Z}$ pour que $\frac{17\pi}{3} = \alpha + 2k\pi$
   b) Déduire l'abscisse curviligne principale du point M.
3) Déterminer les abscisses curvilignes principales puis les placer sur (C) :

$$A\left(\frac{7\pi}{2}\right) \quad ; \quad B\left(\frac{67\pi}{4}\right) \quad ; \quad C\left(\frac{267\pi}{6}\right) \quad ; \quad D\left(\frac{-11\pi}{3}\right)$$

4) Simplifier l'expression suivante : $A(x) = cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + sin(\pi + x) - 2\,sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 3\,cos(\pi - x)$

II. Formules de transformation

☞Activité①

Soit (C) un cercle trigonométrique de centre O et$(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$un repère orthonormé direct lié au (C)

1) Les assertions suivantes sont-elles vraies ? en justifiant la réponse
- $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})$; $cos(x+y) = cos(x) + cos(y)$
- $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})$; $sin(x+y) = sin(x) + sin(y)$

2) Soient A et B deux points de (C) d'abscisse curvilignes a et b respectivement
a) Remarquons que $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right) \equiv b - a[2\pi]$. Montrer que $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = cos(a-b)$
b) Ecrire $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ dans la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$
c) En utilisant l'expression analytique du produit scalaire calculer $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$.
d) Déduire que $cos(a-b) = cos(a)\,cos(b) + sin(a)\,sin(b)$.
e) Remarquons que $a + b = a - (-b)$ déduire que $cos(a+b) = cos(a)\,cos(b) - sin(a)\,sin(b)$
f) Remarquons que $cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = sin(x)$.

Déduire que $sin(a+b) = sin(a)\,cos(b) + sin(b)\,cos(a)$ et $sin(a-b) = sin(a)\,cos(b) - sin(b)\,cos(a)$.

Propriété

Soient a et b des nombres réels on a

$\otimes\ cos(a-b) = cos(a)\,cos(b) + sin(a)\,sin(b)$; $\otimes\ sin(a+b) = sin(a)\,cos(b) + sin(b)\,cos(a)$

$\otimes\ cos(a+b) = cos(a)\,cos(b) - sin(a)\,sin(b)$; $\otimes\ sin(a-b) = sin(a)\,cos(b) - sin(b)\,cos(a)$

Application①

1) Calculer $cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ sachant que $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}$.

2) Calculer $cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ sachant que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$.

3) Soit $x \in \mathbb{R}$; simplifier les expressions suivantes

$A(x) = cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$ et $B(x) = sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) - sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$.

☞***Activité ②***

Soient a et b des nombres réels tels que

$a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}$,$b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}$, $a + b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}$et $a - b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}$

Montrer que $tan(a - b) = \frac{tan(a) - tan(b)}{1 + tan(a)\, tan(b)}$ et $tan(a - b) = \frac{tan(a) + tan(b)}{1 - tan(a)\, tan(b)}$

Propriété ②

Soient a et b des nombres réels tels que $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}$ et $b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}$, et

• Si $a - b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}$ on a $tan(a - b) = \frac{tan(a) - tan(b)}{1 + tan(a)\, tan(b)}$.

• Si $a + b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}$ on a $tan(a + b) = \frac{tan(a) + tan(b)}{1 - tan(a)\, tan(b)}$.

Application ②

1) Soit x un nombre réel tel que $x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi / k \in \mathbb{Z}$ et $x \neq \frac{-\pi}{4} + k\pi / k \in \mathbb{Z}$

Simplifier l'expression suivante $A = tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \times tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$

2) Calculer $tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $tan\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ sachant que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$ et $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}$.

Propriété ③ :

Soit $a \in \mathbb{R}$ on a

• $cos(2a) = cos^2(a) - sin^2(a)$; • $cos(2a) = 2\, cos^2(a) - 1$ • $cos^2(2a) = 1 - 2\, sin^2(a)$

• $sin(2a) = 2\, cos(a)\, sin(a)$; • $cos^2(a) = \frac{1 + cos(2a)}{2}$ • $sin^2(a) = \frac{1 - cos(2a)}{2}$

• si $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}$ et $2a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}$ alors $tan(2a) = \frac{2\, tan(a)}{1 - tan^2(a)}$

Application ③

1) On remarque que $\frac{\pi}{4} = 2 \times \frac{\pi}{8}$. Calculer $cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$

2) Soit $x \in \mathbb{R}$ .montrer que $1 + cos(x) + 2\, sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = 2$

3) Soit $x \neq k\pi / k \in \mathbb{Z}$. Montrer que $\frac{1 - cos(x)}{sin(x)} = tan\left(\frac{x}{2}\right)$

III. Transformation d'un produit en une somme – Transformation d'une somme en un produit

1. Transformation d'un produit en une somme

Activité ③

Simplifier les expressions suivantes

b) $cos(a+b)-cos(a-b)$ a) $cos(a+b)+cos(a-b)$

d) $sin(a+b)-sin(a-b)$ c) $sin(a+b)+sin(a-b)$

Propriété ④

Soient a et b deux nombres réels on a

- $cos\,a\,cos\,b=\frac{1}{2}[cos(a+b)+cos(a-b)]$
- $sin\,a\,sin\,b=-\frac{1}{2}[cos(a+b)-cos(a-b)]$
- $sin\,a\,cos\,b=\frac{1}{2}[sin(a+b)+sin\,(a-b)]$
- $cos\,a\,sin\,b=\frac{1}{2}[sin(a+b)-sin\,(a-b)]$

Application ④

1) Calculer $cos\left(\frac{\pi}{12}\right)cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $cos\left(\frac{\pi}{12}\right)sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$
2) Montrer que $cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=cos^2(x)-\frac{3}{4}$
3) Ecrire sous forme d'une somme les expressions suivantes

$A(x)=sin(x)\,sin(3x)\,sin(5x)$ et $B(x)=cos(x)\,cos(3x)\,cos(5x)$

2. Transformations d'une somme en un produit

On pose $p=a+b$ et $q=a-b$ alors $a=\frac{p+q}{2}$ et $b=\frac{p-q}{2}$

Propriété ⑤

Soient p et q deux nombres réels on a

- $sin(p)+sin(q)=2\,sin\left(\frac{p+q}{2}\right)cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$; - $sin(p)-sin(q)=2\,cos\left(\frac{p+q}{2}\right)sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$
- $cos(p)+cos(q)=2\,cos\left(\frac{p+q}{2}\right)cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$; - $cos(p)+cos(q)=-2\,sin\left(\frac{p+q}{2}\right)sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$

Application ⑤

1) a. Transformer en produit les expressions suivantes $A(x)=sin(x)+sin(7x)$ et $B(x)=sin(3x)+sin(5x)$
   b. Déduire que $A(x)+B(x)=4\,cos(x)\,cos(2x)\,sin(4x)$
2) Montrer que $sin\left(\frac{\pi}{12}\right)+sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}}{2}$

IV. Transformation de l'expression $a\,cos(x)+b\,sin(x)$

Introduction

Soient a et b deux nombres réels tels que $(a;b)\neq(0;0)$

On considère l'expression suivante $a\,cos(x) + b\,sin(x)$

On a $a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\right)$

Or on a $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$

Donc $\exists\alpha \in \mathbb{R}/\begin{cases}\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\\ \sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\end{cases}$

D'où $a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}(\cos\alpha\cos x + \sin\alpha\sin x)$.

Par conséquent $a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\alpha)$.

Propriété 6

Soient a et b deux nombres réels tels que $(a;b) \neq (0;0)$

Il existe un nombre réel α tel que $a\cos x + b\sin x = r\cos(x-\alpha)$.
Avec $r = \sqrt{a^2+b^2}$, $\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Remarque

On peut écrire l'expression $a\,cos(x) + b\,sin(x)$ sous forme $a\cos x + b\sin x = r\sin(x+\beta)$

Avec $\sin\beta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\cos\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Exemple

Transformer l'expression suivante $\sqrt{3}\,cos(x) + sin(x)$

On a $a = \sqrt{3}$ et $b = 1$ donc $r = \sqrt{a^2+b^2} = 2$

Donc $\sqrt{3}\cos(x) + \sin(x) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x) + \frac{1}{2}\sin(x)\right) = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

Et aussi $\sqrt{3}\cos(x) + \sin(x) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x) + \frac{1}{2}\sin(x)\right) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

Application 6

Ecrire sous forme de $r\cos(x-\alpha)$ les expressions suivantes

$A(x) = \cos(x) + \sin(x)$; $C(x) = \sqrt{2}\cos(x) + \sqrt{2}\sin(x)$

$B(x) = \cos(x) - \sqrt{3}\sin(x)$; $D(x) = \sqrt{3}\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$

V. Equations et inéquations trigonométriques

Rappel

$$\otimes \quad \cos x = \cos\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ x = -\alpha + 2k\pi \end{cases} /k \in \mathbb{Z}$$

$$\otimes \quad \sin x = \sin\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ x = \pi - \alpha + 2k\pi \end{cases} /k \in \mathbb{Z}$$

$\otimes \quad tan\, x = tan\, \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi \ \ /k \in \mathbb{Z}$

Remarque

Les inéquations trigonométriques se résoudre à l'aide du cercle trigonométrique

Application ⑦

1) Résoudre les équations suivantes dans l'intervalle I

$2\cos x - \sqrt{3} = 0$	$I =]-\pi;\pi]$
$\sqrt{2} sin\, x + 1 = 0$	$I =]-\pi;\pi]$
$tanx = \sqrt{3}$	$I = [0,2\pi]$
$\sqrt{3}\cos x - \sin x = \sqrt{2}$	$I = [-\pi,\pi]$

2) Résoudre dans I les inéquations suivantes :

* $2\, cos\, x - \sqrt{3} \geq 0$; $I =]-\pi;\pi]$
* $\sqrt{2}\, sin\, x + 1 \leq 0$; $I =]-\pi;\pi]$
* $cos\, x > \frac{-\sqrt{2}}{2}$; $I = [0;2\pi]$
* $(\sqrt{2}\, sin\, x + 1)(2\, cos\, x - \sqrt{3}) \geq 0 \quad I =]-\pi;\pi]$