Continuité d'une fonction numérique

I- La continuité en un point - La continuité sur un intervalle 2

1) Continuité d'une fonction en un point 2

2) La continuité à droite - la continuité à gauche en un point. 2

3) Continuité d'une fonction sur un intervalle 4

4) Continuité des fonctions usuelles 4

II- Image d'un intervalle par une fonction continue 4

1) Image d'un intervalle par une fonction continue 4

2) Image d'un intervalle par une fonction continue et strictement monotone . 5

III. Les opérations sur les fonctions continues 6

IV. Théorème des Valeurs intermédiaires 7

V. La fonction réciproque d'une fonction continue et strictement monotone . 8

VI. Principe de la Méthode de Dichotomie 10

I- La continuité en un point - La continuité sur un intervalle

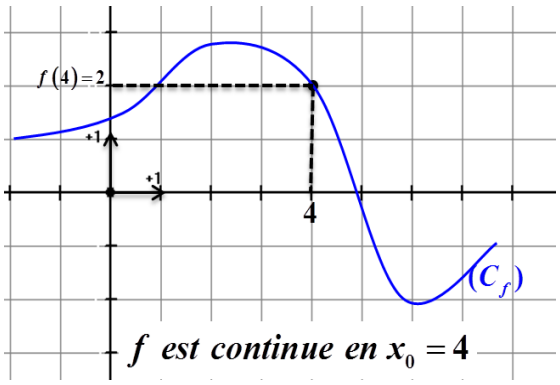
1) Continuité d'une fonction en un point

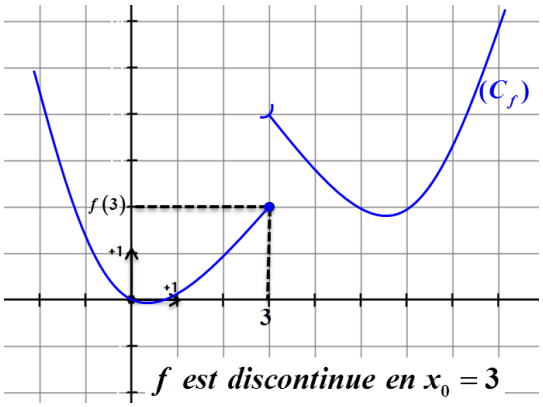
Définition 1

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert I et soit x_0 un réel de I.

On dit que f est ***continue*** en x_0 si et seulement si : $lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Graphiquement, dire que f est continue en x_0 signifie que sa courbe représentative $(\mathcal{C}_f)$ ne présente aucun saut au point $M(x_0; f(x_0))$.





Exercice :

On considère deux fonctions f et g définies par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1} \; ; x \neq 1 \\ f(1) = 2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} g(x) = \dfrac{x^2+x}{x} \; ; x \neq 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$$

① Etudier la continuité de f au point d'abscisse $x_0 = 1$.

② Etudier la continuité de g au point d'abscisse $x_0 = 0$.

Exercice :

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \frac{-2x^2-x+1}{x-1} \; ; x \neq -1 \\ f(-1) = 1 \end{cases}$

La fonction f est-elle continue en -1 ?

Exercices : 3 ; 5 ; 6 et 7 pages 41 et 42.

2) La continuité à droite - la continuité à gauche en un point

Définition 2

Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $[x_0; x_0 + \alpha[$, avec $\alpha > 0$.

On dit que f est ***continue à droite*** en x_0 si et seulement si : $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x>x_0}} f(x) = f(x_0)$.

Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $]x_0-\alpha;x_0[$, avec $\alpha>0$.

On dit que f est ***continue à gauche*** en x_0 si et seulement si : $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x)=f(x_0)$.

Exercice :

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x)=x^2+1 & ; \quad x>1 \\ f(x)=x+\dfrac{1}{x+1} & ; \ 0\le x\le 1 \\ f(x)=x+1 & ; \quad x<0 \end{cases}$$

Etudier la continuité de la fonction f à droite en 1 et à gauche en 0.

Exercice :

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x)=\sqrt{3x^2+4} & ; \quad x\ge 2 \\ f(x)=3+\sqrt{3-x} & ; \quad x<2 \end{cases}$$

Etudier la continuité de la fonction f à droite et à gauche en 2.

Propriété 1

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et $x_0\in I$.

La fonction f est **continue en x_0** si et seulement si f est **continue à droite et à gauche en x_0**.

Exercice :

Soit f la fonction numérique définie par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{|x|}{x} & ; x\neq 0 \\ f(0)=-1 \end{cases}$

1) Etudier la continuité de f en 0.

2) Tracer la courbe de la fonction f dans un repère orthonormé.

Exercice :

Soit f la fonction numérique définie par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{1-x}-1}{x} & ; x<0 \\ f(x)=\sqrt{1+x}-\dfrac{1}{2} & ; x\ge 0 \end{cases}$

Etudier la continuité de f en 0.

Exercice :

Soit f la fonction numérique définie par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x-\sqrt{x}}{x-1} & ; x\in[0;1[\\ f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x-1}} & ; x\in]1;+\infty[\\ f(1)=\dfrac{1}{2} \end{cases}$

Etudier la continuité de f en 1.

3) Continuité d'une fonction sur un intervalle

Définition 3

- La fonction f est continue sur l'intervalle ouvert $]a;b[$, si f est continue en tout points de $]a;b[$.
- La fonction f est continue sur l'intervalle $[a;b]$, si f est continue sur l'intervalle $]a;b[$ et continue à droite en a et à gauche en b

Remarques:

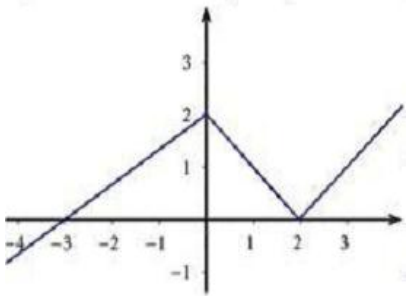
☑ De façon analogue, on définit la continuité de f sur les intervalles du type : $]a;b]$, $[a;b[$, $[a;+\infty[$ et $]-\infty;b]$.

☑ Graphiquement, la continuité d'une fonction f sur un intervalle I se traduit par une courbe en un seul morceau.

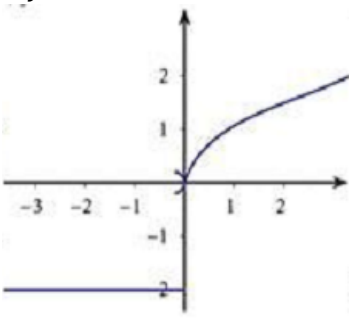
Exercice :

Répondre par Vrai ou Faux en se référant à la représentation graphique de f, dans chacun des cas suivants :

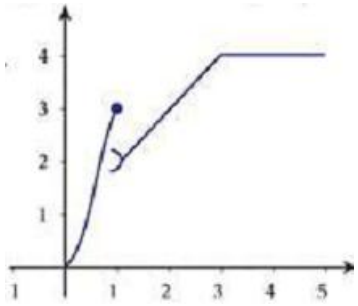
f est continue sur $[-2;3]$



f est continue en 0



f est continue sur $]0;5]$



4) Continuité des fonctions usuelles

Propriété 2

- Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$.
- Toute fonction rationnelle est continue sur chaque intervalle inclus dans son domaine de définition.
- La fonction : $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0;+\infty[$.

II- Image d'un intervalle par une fonction continue

1) Image d'un intervalle par une fonction continue

Activité : On considère la fonction f définie par : $f(x) = x^2$

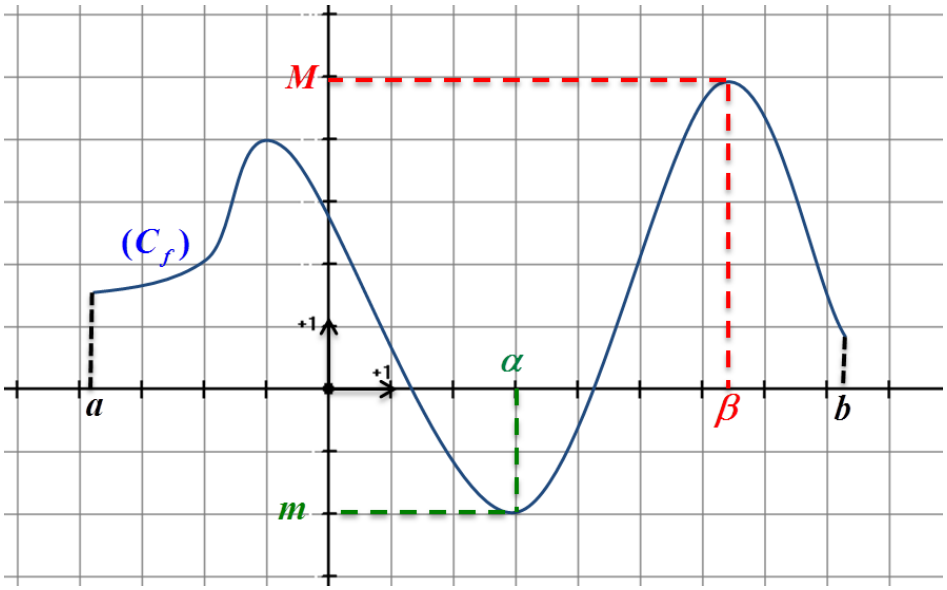
① Tracer dans un repère orthonormé, $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de f.

② Déterminer $f([1;2])$; $f(]0;3])$; $f([-3;-1])$; $f([-1;2])$; $f([-3;3])$.

Propriété 3

➢ L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

➢ Si une fonction f est continue sur un segment $[a;b]$, alors son image par f est le segment $[m;M]$ ou m et M sont, respectivement, les valeurs minimale et maximale de f sur le segment $[a;b]$.



2) Image d'un intervalle par une fonction continue et strictement monotone:

Soit f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I, Le tableau suivant détermine $f(I)$, selon le sens de monotonie de f et le type d'intervalle I

L'intervalle I	Image de l'intervalle I par f	
	f strictement croissante sur I	f strictement décroissante sur I
$[a;b]$	$[f(a);f(b)]$	$[f(b);f(a)]$
$[a;b[$	$[f(a);\lim\limits_{x\to b^-} f(x)[$	$]\lim\limits_{x\to b^-} f(x);f(a)]$
$]a;b]$	$]\lim\limits_{x\to a^+} f(x);f(b)]$	$[f(b);\lim\limits_{x\to a^+} f(x)[$
$]a;b[$	$]\lim\limits_{x\to a^+} f(x);\lim\limits_{x\to b^-} f(x)[$	$]\lim\limits_{x\to b^-} f(x);\lim\limits_{x\to a^+} f(x)[$
$[a;+\infty[$	$[f(a);\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)[$	$]\lim\limits_{x\to +\infty} f(x);f(a)]$
$]-\infty;a[$	$]\lim\limits_{x\to -\infty} f(x);\lim\limits_{x\to a^-} f(x)[$	$]\lim\limits_{x\to a^-} f(x);\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)[$
$]-\infty;+\infty[$	$]\lim\limits_{x\to -\infty} f(x);\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)[$	$]\lim\limits_{x\to +\infty} f(x);\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)[$

Exercice :

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x)=\frac{1+x^2}{x}$, son tableau de variations est comme suit :

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	-2	↘	$+\infty$ ↘	$+\infty$
				2 ↗	

Déterminer $f([1;3])$; $f([-1;0[)$; $f(]-\infty;-6])$; $f(]0;+\infty[)$.

Exercice :

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x)=\frac{3x+4}{2x+1}$

1. Déterminer D_f l'ensemble de définition de f.
2. Etudier la monotonie de f sur l'intervalle $]-\infty;-1/2[$.
3. Déterminer l'image de l'intervalle $]-\infty;-1/2[$ par la fonction f.

Exercice :

Soit g la fonction numérique définie par : $g(x)=x^2-2x+3$

Déterminer les image des intervalles $]-\infty;0[$; $[1;2]$ et $[-1;2]$ par la fonction g.

Exercices : 18 ; 19 et 20 pages 43.

III. Les opérations sur les fonctions continues

Propriété 4

Soient f *et* g deux fonctions numériques, définies sur un intervalle ouvert I et k un nombre réel.

Si f *et* g sont continues sur l'intervalle I alors :

- Les fonctions $f+g$; $f\times g$ *et* kf sont continues sur l'intervalle I.
- La fonction f^n ($o\grave{u}\ n\in\mathbb{N}^*$) est continue sur l'intervalle I.
- La fonction $|f|$ est continue sur l'intervalle I.
- Si la fonction g est non nulle sur I ; alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues sur I.

Exemple:

Etudions la continuité de la fonction $f: x\longmapsto 2x^3-5x+(4x+1)\sqrt{x}$ sur $[0;+\infty[$.

Exercice : 39 page 46.

Propriété 5 : *Continuité de la composée de deux fonctions*

Soient f *et* g deux fonctions numériques, à variables réelle, définies, respectivement, sur deux intervalles ouverts I et J tels que $f(I)\subset J$.

Si f est continue sur l'intervalle I et si g est continue sur l'intervalle J, alors la fonction composée $g\circ f$ est continue sur l'intervalle I.

Remarque : Si : $J = \mathbb{R}$, alors la condition $f(I) \subset J$ devient inutile.

Exemple: Etudions la continuité de la fonction $h: x \mapsto \sqrt{x^2 - 9}$ sur $[3; +\infty[$.

Conséquence:

Si une fonction u est positive et continue sur un intervalle I
alors la fonction $\sqrt{u}$ est continue sur l'intervalle I

Exemple: Etudions la continuité de la fonction $k: x \mapsto \sqrt{\frac{1-x}{x-2}}$ sur $[1; 2[$.

Exercice :

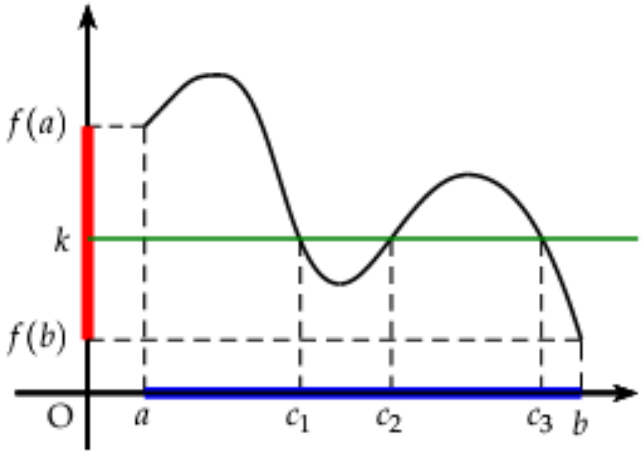
Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{4-x}$.

Montrer que la fonction f est continue sur l'intervalle $[2; 4[$.

IV. Théorème des Valeurs intermédiaires

Propriété 6

Si une fonction f est continue sur un intervalle $[a; b]$, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un nombre α de $[a; b]$, tel que $f(\alpha) = k$.



En d'autres termes : l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans $[a; b]$ pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$.

Un exemple de la vie courante :

Si à 13h, je roule à 80 km/h, et qu'à 13h05, je roule à 120 km/h, alors, entre 13h et 13h05, il y a eu un ou plusieurs moments où j'ai roulé à 100 km/h.

Conséquence:

- Si f est continue sur l'intervalle $[a; b]$ tel que $f(a).f(b) < 0$
  alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $]a; b[$.
- Si de plus, la fonction f est **strictement monotone** sur $[a; b]$,
  alors la solution est **unique**.

Exemple:

« Montrons qu'une solution de l'équation $4x^3 - 6x^2 + 3x - 2 = 0$ est située entre 1 et 2 ».

Posons : $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x - 2$.
Nous sommes à la recherche d'un zéro de l'équation donnée, c'est-à-dire d'un nombre α situé entre 1 et 2 tel que $f(\alpha) = 0$.

On a : $f(1) = 4 - 6 + 3 - 2 = -1 < 0$ et $f(2) = 32 - 24 + 6 - 2 = 12 > 0$
Donc $f(1).f(2) < 0$.

De plus, f, étant une fonction polynomiale, est continue sur $\mathbb{R}$.
Donc f est continue sur l'intervalle $[1; 2]$.

Dans ces conditions, le théorème de la valeur intermédiaire affirme l'existence d'un nombre α entre 1 et 2 tel que $f(\alpha) = 0$.
Autrement dit, l'équation $4x^3 - 6x^2 + 3x - 2 = 0$ a au moins une solution dans l'intervalle $]1; 2[$.

Exercice:

1. Montrer que l'équation $x^7 - x^4 + 3x - 2 = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $]0; 1[$
2. Montrer que l'équation $x^3 + x - 1 = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $]0; 2[$

Exercices : 24 ; 25 ; 27 ; 28 et 29 pages 44 et 45.

V. La fonction réciproque d'une fonction continue et strictement monotone

Activité :

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $I = [1; 3]$ par : $f(x) = x^2 - 2x$

1. Montrer que la fonction f est continue et strictement monotone sur I.
2. Déterminer l'intervalle J l'image de I par f.
3. Soient $x \in J$ et $y \in I$, montrer que : $f(y) = x \Leftrightarrow y = 1 + \sqrt{x + 1}$.

Propriété 7

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I, alors pour tout y de $f(I)$, l'équation $f(x) = y$ admet une seule solution dans l'intervalle I.

Définition 4

Soient f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I et J l'image de I par la fonction f.

La relation qui à chaque élément y de l'intervalle J associe l'élément x de l'intervalle I tel que $f(x) = y$, est une fonction définie de J vers I. Cette fonction est appelée **la fonction réciproque** de la fonction f, elle est notée $\boldsymbol{f^{-1}}$.

Conséquences :

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur l'intervalle I et f^{-1} sa fonction réciproque, on a :

★ $\begin{cases} f^{-1}(x) = y \\ x \in f(I) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(y) = x \\ y \in I \end{cases}$

★ $\forall x \in I;\ f^{-1} \circ f(x) = x$

★ $\forall x \in f(I);\ f \circ f^{-1}(x) = x$

Exemple:

Soit f la fonction définie sur $I =]2; +\infty[$ par $f(x) = \frac{3x}{x-2}$.

1) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1}définie sur un intervalle J à déterminer .

2) Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout x de J

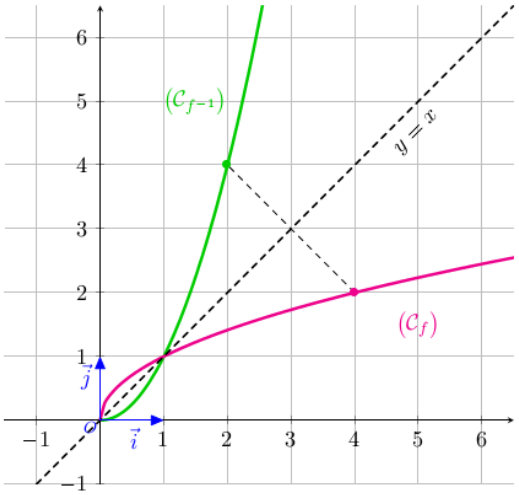
Propriété 8

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I et f^{-1} sa réciproque, alors :

➢ La fonction f^{-1} est **continue** sur $f(I)$.

➢ La fonction f^{-1} est strictement monotone sur $f(I)$ et elle a **le même sens de variation** que f sur I.

➢ La courbes représentatives de f et f^{-1}, dans le plan muni d'un repère orthonormé, sont **symétriques** par rapport à la $1^{ère}$ bissectrice (la droite d'équation $y = x$).



Remarque :

Si $M(x; f(x)) \in (C_f)$ alors $M'(f(x); x) \in (C_{f^{-1}})$.

Application:

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I = [-1; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x+1}$.

1) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1}définie sur un intervalle J à

déterminer .

2) Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout x de J

3) Tracer dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$, $(C_{f^{-1}})$ la courbe représentative de f^{-1} puis en déduire celle de f

Exercices : 32 ; 33 et 34 pages 45 et 46.

VI. Principe de la MÉTHODE DE DICHOTOMIE

Considérons une fonction f continue sur un intervalle $[a;b]$.
On suppose que l'équation $f(x)=0$ admette une solution unique α dans $]a;b[$.
Pour déterminer un encadrement de α avec une précision donnée; on suit les étapes suivantes :

☑ On calcul $f(c_1)$ avec $c_1=\frac{a+b}{2}$ le milieu de l'intervalle $]a;b[$.

Si $(c_1).f(b)<0$, la solution est dans l'intervalle $]c_1;b[$;

sinon la solution est dans intervalle $]a;c_1[$.

☑ On calcul $f(c_2)$ avec c_2 le milieu du nouvel intervalle, et continuer comme précédemment jusqu'à obtenir la précision voulue.

Exercice d'application:

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $[2;4]$ par : $f(x)=x^3-3x^2-5$.

1) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une seule solution α dans l'intervalle $]2;4[$.
2) Vérifier que le nombre 3 est le centre de l'intervalle $[2;4]$, puis calculer $f(3)$, et déduire que : $2<\alpha<4$.
3) Calculer $f(3{,}5)$, et déduire un autre encadrement de α.
4) Par la même méthode, donner un encadrement de α d'amplitude 25×10^{-2}.

Exercice :

❶ Montrer que l'équation $x^3+x-1=0$ admet une unique solution α dans $]0;2[$

❷ Donner un encadrement de α d'amplitude 25×10^{-2}

Exercice : 31 page 45.