# Continuité d'une fonction numérique

Remarques

## I. Continuité d'une fonction numérique :

**Activité ①: Soutient des prérequis**

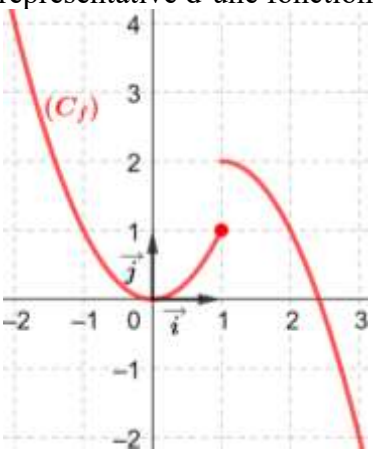
Calculer les limites suivantes :

| | | |
|---|---|---|
| **a.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2+x+3}{x-1}$ | **b.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x\lvert x\rvert-4x+3}{x^5-7x+2}$ | **c.** $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^2+5x+6}{x+2}$ |
| **d.** $\lim\limits_{x\to-3}\frac{2x^2+3x-9}{x^2+x-6}$ | **e.** $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{2x+7}-3}{x-1}$ | **f.** $\lim\limits_{x\to-2}\frac{\sqrt{2x^2+1}-3\sqrt{x+3}}{x+2}$ |
| **g.** $\lim\limits_{x\to2^-}\frac{x^2+5x+6}{2-x}$ | **h.** $\lim\limits_{x\to-3^+}\frac{2x^2+x-2}{-x^2-x+6}$ | **i.** $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sin(\pi x)}{x-1}$ |

### 1. Continuité d'une fonction en un point

**Activité ②:**

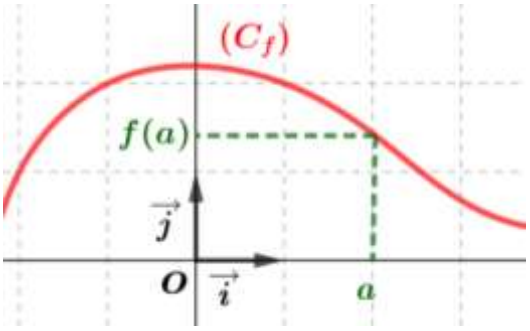
On donne ci-dessous la courbe représentative d'une fonction $f$ .



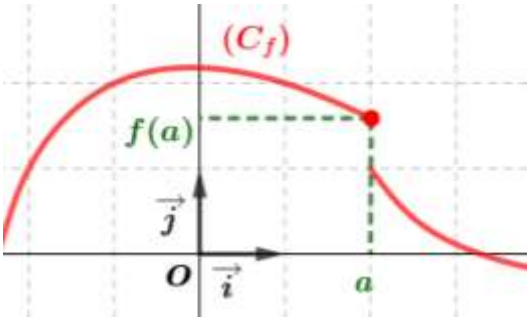

1. Déterminer graphiquement $f(-1)$ et $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$ .Que peut-on déduire ?
2. Déterminer graphiquement $f(1)$ et $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$ . Que peut dire sur $(C_f)$ au point $x_0 = 1$?

**Définition :**

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle ouvert $I$ et a un point de $I$.
On dit que $f$ est ***continue*** en $a$ si seulement si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ .




- $f$ est continue en $a$




- $f$ est discontinue en $a$

**Exemples :**

- La fonction définie par $\begin{cases} f(x) = \frac{x^2-9}{x-3} \ ; \ x \neq 3 \\ f(3) = 6 \end{cases}$ est continue en 3.

En effet : $\lim\limits_{x\to3} f(x) = \lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-9}{x-3}$

$= \lim\limits_{x\to3}\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}$

$= \lim\limits_{x\to3} x+3 = 6 = f(3).$

○ La fonction définie par $\begin{cases} f(x) = \frac{\sin(3x)}{x} \; ; \; x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$ est discontinue en 0.

En effet : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 3} \frac{sin(3x)}{x}$

$= \lim\limits_{x\to 3} 3 \times \frac{sin(3x)}{3x}$

$= 3 \neq f(0).$

### ✍ Application ① :

Etudier la continuité des fonctions suivantes au point $a$.

**1.** $\begin{cases} f(x) = \frac{x^3-2x+1}{x-1} \; ; x \neq 1 \\ f(1) = 1 \end{cases}$ et $a = 1$.

**2.** $\begin{cases} g(x) = \frac{x\sqrt{x+2}-4}{x-2} \; ; \quad x \in [-2;2[\cup]2;+\infty[ \\ g(2) = \frac{5}{2} \end{cases}$ et $a = 2$.

### ✍ Exercice ①:

Etudier la continuité des fonctions suivantes au point $a$.

**1.** $\begin{cases} f(x) = \frac{x^3+2x^2+3x+2}{x^2+4x+3} \; ; \; x \neq -1 \\ f(-1) = 1 \end{cases}$ et $a = -1$.

**2.** $\begin{cases} g(x) = \frac{\sin(x-2)}{x^2-2x} ; x > 2 \\ g(2) = \frac{1}{2} \end{cases}$ et $a = 2$.

## 2. Continuité à droite – continuité à gauche :

### Définition :

- Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $]a-r\,;a]$ avec $r > 0$.

On dit que $f$ est ***continue à droite*** de $a$ si seulement si $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$.

- Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $[a\,;a+r[$ avec $r > 0$.

On dit que $f$ est ***continue à gauche*** de $a$ si seulement si $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a)$.

### Exemple :

La fonction définie par $\begin{cases} f(x) = \frac{x^2-1}{|x-1|} \; ; \; x \neq 1 \\ f(1) = 2 \end{cases}$ est continue à droite en 1 est non continue en 1 à gauche.

En effet : $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x^2-1}{|x-1|}$

$= \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x^2-1}{x-1}$ (Du fait que $|x-1| = x-1$ si $x > 1$)

$= \lim\limits_{x\to 1^+} x + 1 = 2 = f(1).$

Ainsi $f$ est continue à droite en 1.

Et : $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x^2-1}{|x-1|}$

$= \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x^2-1}{-(x-1)}$ (Du fait que $|x-1| = -(x-1)$ si $x < 1$)

$= \lim\limits_{x\to 1^+} -(x+1) = -2 \neq f(1).$

Ainsi $f$ est discontinue à gauche en 1.

### Propriété :

$f$ est continue en $a$ si seulement si $f$ est continue à gauche et à droite de $a$.

Autrement : $f$ est continue en $a \iff \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a)$.

### ✍ Application ② :

On considère $f$ la fonction définie par $\begin{cases} f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} & ; x > 0 \\ f(x) = \frac{sin(2x)}{x} & ; x < 0 \\ f(0) = 2 \end{cases}$.

1. Etudier la continuité de $f$ à droite et à gauche en 0.
2. $f$ est-elle continue en 0.

### Exercice ②:

1. Soit $f$ la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} \; ; \; x > 2 \\ f(x) = \frac{x^2-4x+3}{x-3} \; ; \; x \leq 2 \end{cases}$

Etudier la continuité de $f$ à droite et à gauche en 2.

2. Soit $g$ la fonction définie par $\begin{cases} g(x) = x^3 + ax \quad ; \quad x > -1 \\ g(x) = -x + 1 \quad ; \; x \leq -1 \end{cases}$.

Déterminer la valeur de $a$ pour que $g$ soit continue en $-1$.

## 3. Continuité d'une fonction sur un intervalle :

### Définition :

- On dit que $f$ est continue sur l'intervalle ouvert $]a; b[$ si $f$ est continue en tout point de $]a; b[$.
- On dit que $f$ est continue sur l'intervalle $[a, b]$ si $f$ est continue en tout point de $]a; b[$ et continue à droite de $a$ et à gauche de $b$.

### Remarque :

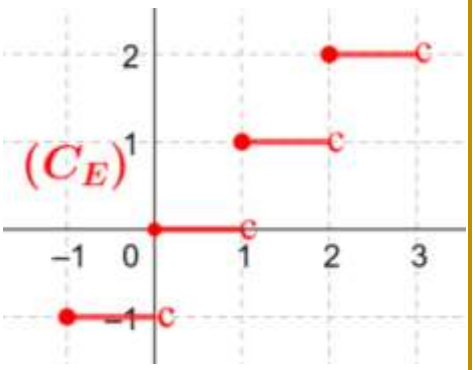
On définit de même manière la continuité sur les intervalles $[a, b[$, $]a, b]$, $[a, +\infty[$ et $]-\infty, b]$.

### Exemple : Fonction partie entière

- La fonction partie entière est la fonction qui, à tout réel $x$, associe l'unique entier relatif $n$ tel que $n \leq x < n + 1$.On note la partie entière de $x$ par $E(x)$ ou $[x]$.
- ***Exemples***

$E(3{,}2) = 3$ parce que $3 \leq 3{,}2 < 4$ et $E(-1{,}2) = -2$ parce que $-2 \leq -1{,}2 < -1$.

- La courbe de la fonction $x \longmapsto E(x)$ sur l'intervalle $[-1; 3[$ est :




- La fonction $x \longmapsto E(x)$ est continue sur l'intervalle $[-1; 0[$ du fait qu'elle est continue en tout point de $]-1; 0[$ et à droite en $-1$ car $\lim\limits_{x \to -1^+} E(x) = -1 = E(-1)$.
- La fonction $x \longmapsto E(x)$ n'est pas continue sur l'intervalle $]1; 3[$ du fait qu'elle n'est pas continue en 1 car $\lim\limits_{x \to 1^+} E(x) = 1 = E(1)$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} E(x) = 0 \neq E(1)$.

### Propriété :

- Toute fonction polynômiale est continue sur $\mathbb{R}$.
- Toute fonction rationnelle est continue sur un intervalle inclus dans son domaine de définition.
- Les fonctions $x \longmapsto \sin(x)$ et $x \longmapsto cos(x)$sont continues sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $x \longmapsto tan(x)$ est continue sur $IR - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in Z\right\}$.
- La fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ est continue $\mathbb{R}^+$.
- La fonction$x \longmapsto |x|$ est continue $\mathbb{R}$.

### Exemples :

- La fonction $f: x \longmapsto x^3 + 2x^2 - x + 1$ est continue sur $\mathbb{R}$ parce qu'elle est une fonction polynômiale.
- La fonction $g: x \longmapsto \frac{5x^3+2x-1}{x^2-1}$ est continue sur $]1; +\infty[$ parce qu'elle est une fonction rationnelle et $]1; +\infty[ \subset \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$.

### Application ③ :

On considère $f$ la fonction définie par $\begin{cases} f(x) = -x + 4 \quad ; \quad x < 3 \\ f(x) = \frac{6-x}{x} \quad ; \quad x \geq 3 \end{cases}$.

Montrer que la fonction $f$ est continue sur $\mathbb{R}$.

## II. Image d'un intervalle par une fonction continue :

### 1. Image d'un segment- Image d'un intervalle

**Propriété :**

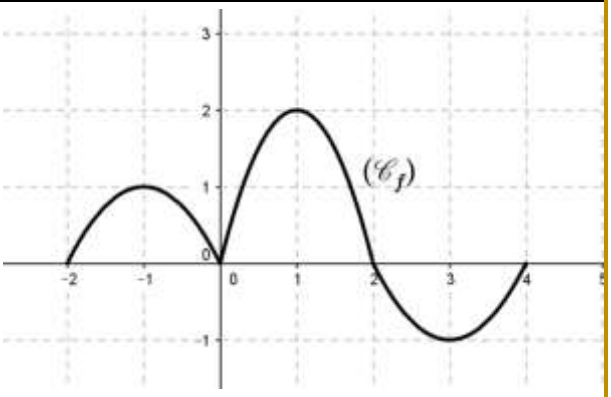
- L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.
- L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

**Remarque :**

Si $f$ est continue sur un segment $[a, b]$ et $M$ et $m$ sont respectivement le maximum et le minimum de $f$ sur $[a, b]$, alors $f([a, b]) = [m, M]$.

**Application ④ :**

On donne ci-contre la courbe d'une fonction $f$ définie sur $[-2; 4]$.
Déterminer l'image des intervalles suivants $[-2,3]$ , $[0,1]$, $[1,3]$ et $]-1,1]$ par $f$.




### 2. Image d'un intervalle par une fonction continue et strictement monotone

Soit $f$ une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $I$.
Dans ce tableau suivant $a$ et $b$ sont deux nombres réels ou $+\infty$ ou $-\infty$.

| Image de l'intervalle $I$ par la fonction $f$ | | |
|---|---|---|
| L'intervalle $I$ | $f$ strictement croissante sur $I$ | $f$ strictement décroissante sur $I$ |
| $[a, b]$ | $[f(a), f(b)]$ | $[f(b), f(a)]$ |
| $[a, b[$ | $\left[f(a), \lim\limits_{x \to b^-} f(x)\right[$ | $\left]\lim\limits_{x \to b^-} f(x), f(a)\right]$ |
| $]a, b]$ | $\left]\lim\limits_{x \to a^+} f(x), f(b)\right]$ | $\left[f(b), \lim\limits_{x \to a^+} f(x)\right[$ |
| $]a, b[$ | $\left]\lim\limits_{x \to a^+} f(x), \lim\limits_{x \to b^-} f(x)\right[$ | $\left]\lim\limits_{x \to b^-} f(x), \lim\limits_{x \to a^+} f(x)\right[$ |

**Exemple :**

On considère $f$ la fonction définie par $f(x) = x^2 - 4x - 1$.
La fonction $f$ est strictement décroissante sur $]-\infty; 2]$ et strictement croissante sur $[2; +\infty[$.On a :

- $f([2; 4]) = [f(2); f(4)] = [-5; -1]$ .
- $f([-1; 1]) = [f(1); f(-1)] = [-4; 4]$ .
- $f([2; +\infty[) = \left[f(2), \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)\right[ = [-5; +\infty[$ .
- $f(]-\infty; 2]) = \left[f(2), \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)\right[ = [-5; +\infty[$.

**Application ⑤ :**

Soit $f$ une fonction définie par $f(x) = \frac{3x+2}{x-4}$.

1. Déterminer $D_f$.
2. Etudier la monotone de $f$.
3. Déterminer $f([0,1])$ ; $f(]4, +\infty[)$ et $f(]-\infty, 4[)$.

**Exercice ③:**

On considère $f$ une fonction définie par $f(x) = 2x^3 - 3x^2$.

1. Dresser le tableau de variation de la fonction $f$.
2. Déterminer les images des intervalles suivants $]-1; 0]$ ; $[1; 2]$ ; $[-1; 2[$; $[1; +\infty[$ par $f$.

## III. Opérations sur les fonctions continuités

**Propriété :**

Soient $f$ et $g$ deux fonctions continues sur un intervalle $I$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

- Les fonctions $f+g$ ; $f \times g$ ; $\lambda f$ et $|f|$ sont continues sur $I$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction $f^n$ est continue sur $I$.
- Si $(\forall x \in I) : g(x) \neq 0$, alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues sur $I$.
- Si $(\forall x \in I) : f(x) \geq 0$ , alors $\sqrt{f}$ est continue sur $I$.

**Exemples :**

- La fonction $f: x \mapsto 2x^2 - x + \sqrt{x}$ est continue sur $[0, +\infty[$ en tant que somme de deux fonctions continues sur $[0, +\infty[$ qui sont $x \mapsto 2x^2 - x$ et $x \mapsto \sin(x)$.
- On considère $g: x \mapsto \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$. On a :

➢ La fonction $x \mapsto x^2 + 1$ est continue sur $]-\infty; 1[$ puisqu'elle est une fonction polynomiale et on a $(\forall x \in ]-\infty; 1[) : x^2 + 1 > 0$. Ainsi $x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ est continue sur $]-\infty; 1[$.

➢ La fonction $x \mapsto x + 1$ est continue sur $]-\infty; 1[$ et on a $(\forall x \in ]-\infty; 1[) : x + 1 \neq 0$.

Il en résulte que la fonction $g$ est continue sur $]-\infty; 1[$.

**Application ⑥ :**

Montrer que $f$ est continue sur $I$ dans les cas suivants :

1. $f(x) = x^2 + 1 + sin(x)$ et $I = \Upsilon$.
2. $f(x) = \cos(x) \times \sqrt{4x^2+5}$ et $I = \Upsilon$.
3. $f(x) = \frac{4\sqrt{x}}{x^2+x-2}$ et $I = ]2; +\infty[$.

**Propriété :**

Soient $f$ et $g$ deux fonctions.
Si $f$ est continue sur un intervalle $I$ et g continue sur un intervalle $J$ tel que $f(I) \subset J$ alors la fonction $gof$ est continue sur l'intervalle $I$.

**Exemple :**

On considère la fonction $h: x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$.

On a $h = gof$ avec $f: x \mapsto \sqrt{x}$ et $g: x \mapsto \frac{x}{x+1}$.

Puisque $f$ est continue sur $[0; +\infty[$ et $g$ est continue sur $]-1; +\infty[$ et $f([0; +\infty[) \subset [0; +\infty[$ , alors $h$ est continue sur $[0; +\infty[$.

**Application ⑦ :**

On considère la fonction $h: x \mapsto sin(x^2 - 4x + 1)$.

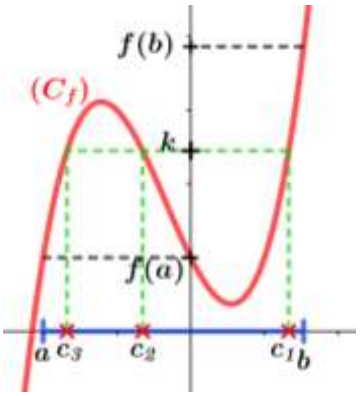
Montrer que $h$ est continue sur $\Upsilon$.

## IV. Théorème des valeurs intermédiaires

**Théorème :**

Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$.
Pour tout réel $k$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe au moins un réel $c$ de l'intervalle $[a, b]$ tel que $f(c) = k$.

***En d'autres termes :*** l'équation $f(x) = k$ d'inconnue $x$ admet au moins une solution dans $[a, b]$ pour tout $k$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$.




### Exemple :

Montrons que l'équation $(E) : x^2 - \sqrt{x+2} = 2$ admet au moins une solution sur $[-2; 0]$.
On considère $f$ la fonction définie par $f(x) = x^2 - \sqrt{x+2}$.
L'équation $(E)$ est équivalente à l'équation $f(x) = 2$.
La fonction $f$ est continue sur $[-2; 0]$ comme somme de deux fonctions continues et on a $f(-2) = 4$ et $f(0) = -\sqrt{2}$.
Puisque $f(0) \leq 2 \leq f(-2)$, alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $(E)$ admet au moins une solution sur $[-2; 0]$.

### Corollaire :

Si la fonction $f$ est continue sur $[a, b]$ tel que $f(a) \times f(b) < 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[a, b]$.
Si de plus $f$ est strictement monotone, alors cette solution est unique.

### Exemple :

Montrons que l'équation $(E) : x^3 + x^2 + 1 = 0$ admet une unique solution $\alpha$ telle que $-1 < \alpha < 0$.
On considère $f$ la fonction définie par $f(x) = x^3 + x^2 + 1$.
L'équation $(E)$ est équivalente à l'équation $f(x) = 0$.
La fonction $f$ est continue et strictement croissante sur $[-1; 0]$ et on a $f(-1) \times f(0) < 0$.
Donc d'après T.V.I l'équation $(E)$ admet une solution unique $\alpha$ tel que $-1 < \alpha < 0$ .

***Donnons un encadrement de α d'amplitude* 0,25.**

On a $-1 < \alpha < 0$, alors $\alpha = -\frac{1}{2}$ ou $\alpha \in \left]-1, -\frac{1}{2}\right[$ ou $\alpha \in \left]-\frac{1}{2}, 0\right[$.
Or $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$, alors $\alpha \neq -\frac{1}{2}$.
Et puisque $f(-1) \times f(-\frac{1}{2}) < 0$, alors $\alpha \in \left]-1, -\frac{1}{2}\right[$ et l'amplitude de cet encadrement est $-\frac{1}{2} - (-1) = \frac{1}{2} > 0{,}25$. On répète donc le procédé précédent.
On a $\alpha \in \left]-1, -\frac{1}{2}\right[$, alors $\alpha = -\frac{3}{4}$ ($-\frac{3}{4}$ est le centre de $\alpha \in \left]-1, -\frac{1}{2}\right[$ )ou $\alpha \in \left]-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}\right[$ ou $\alpha \in \left]-1, -\frac{3}{4}\right[$.
Puisque $f\left(-\frac{3}{4}\right) \neq 0$ et $f(-\frac{3}{4}) \times f(-\frac{1}{2}) < 0$, alors $\alpha \in \left]-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}\right[$ et l'amplitude de cet encadrement est $-\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = 0{,}25$.
Ce procédé est appelé ***la dichotomie***.

### Application ⑧:

1. Montrer que l'équation $x^5 - x^3 + 5x - 4 = 0$ admet au moins une solution sur l'intervalle $[0,1]$.
2. Montrer que l'équation $\sin(x) + \frac{1}{2} = -x$ admet une solution unique dans l'intervalle $\left[\frac{-\pi}{6}; 0\right]$.

### Exercice ④:

Soit $f$ la fonction définie sur $IR$ par $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ sur $[1; +\infty[$ puis vérifier que $1 < \alpha < 2$.

**2.** Donner un encadrement de $\alpha$ d'amplitude 0,25.

**3.** Donner le signe de $f$ sur $[1;+\infty[$.

## V. Fonction Réciproque d'une fonction continue et strictement monotone :

### Activité ②:

Soit la fonction définie sur $I = [1\,;4]$ par : $f(x) = x^2 - 2x$

**1.** Montrer que $f$ est continue et strictement croissante sur $I$.

**2.** Déterminer l'intervalle $J$ l'image de $I$ par $f$.

**3.** Soit $x \epsilon J$ et $y \epsilon I$ ,montrer que $f(y) = x \Leftrightarrow y = 1 + \sqrt{x+1}$.

**4.** On considère $g$ la fonction définie sur $J$ par $g(x) = 1 + \sqrt{1+x}$.

**a.** Remplir le tableau suivant :

| | |
|---|---|
| • $g(-1) =$ | • $f(1) =$ |
| • $g(0) =$ | • $f(2) =$ |
| • $g(8) =$ | • $f(4) =$ |

**b.** Que remarquez-vous ?

**c.** Montrer que $(\forall x \in I)\ (gof)(x) = x$ et $(\forall x \in J)\ (fog)(x) = x$ .

La fonction $g$ est appelée la fonction réciproque de $f$ et on la note par $f^{-1}$.

### Propriété :

Si $f$ est continue et strictement monotone sur un intervalle $I$, alors $f$ admet une fonction réciproque, notée $f^{-1}$, définie de $J = f(I)$ vers $I$ telle que : $\begin{cases} f^{-1}(x) = y \\ x \in J \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(y) = x \\ y \in I \end{cases}$

### Conséquences :

- $(\forall x \in I): (f^{-1}of)(x) = x$ .
- $(\forall x \in J): (fof^{-1})(x) = x$.

### Exemple :

La fonction $f: x \longmapsto \sqrt{x} + 2$ est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$ , donc $f$ admet une fonction réciproque $f^{-1}$ continue et strictement croissante sur $f([0, +\infty[\,) = [2, +\infty[$.

Déterminons l'expression de $f^{-1}$ :

Soient $y \in [0, +\infty[$ et $x \in [2, +\infty[$, on a :

$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$

$\Leftrightarrow \sqrt{y} + 2 = x$

$\Leftrightarrow \sqrt{y} = x - 2$

$\Leftrightarrow y = (x-2)^2$ .

Donc $f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow y = (x-2)^2$ .

Il en résulte : $(\forall x \in [2, +\infty[\,)\ f^{-1}(x) = (x-2)^2$.

### Application ②:

On considère la fonction $f$ définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{2x-4}$.

**1.** Montrer que f admet une fonction réciproque $f^{-1}$ définie sur un intervalle $J$ à déterminer.

**2.** Déterminer l'expression de $f^{-1}(x)$ pour tout $x$ de $J$.

### Exercice ⑤:

On considère la fonction $f$ définie sur $]-\infty, -1[$ par $g(x) = \frac{2x+3}{x+1}$.

**1.** Montrer que f admet une fonction réciproque $f^{-1}$ définie sur un intervalle $J$ à déterminer.

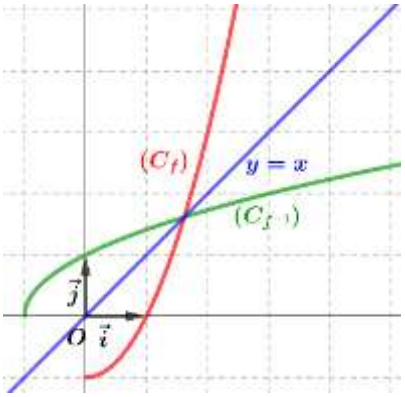
**2.** Déterminer l'expression de $f^{-1}(x)$ pour tout $x$ de J.

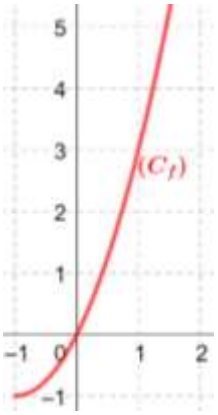
### Propriété :

Si $f$ est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I, alors :

- La fonction réciproque $f^{-1}$ est continue sur $f\ (I)$ et a même sens de variations que la fonction $f$.
- Les courbes représentatives de f et de f dans un repère orthonormé, sont symétriques par

rapport à la droite d'équation $y = x$.




### Application ⑨:

On donne ci-contre la courbe représentative d'une fonction $f$ définie sur $[-1; +\infty[$.

1. Montrer que $f$ admet une fonction réciproque $f^{-1}$ définie sur un intervalle $J$ à déterminer.
2. Dresser le tableau de variations de $f^{-1}$.
3. Construire la courbe représentative de $f^{-1}$.

## VI. Fonction Racine $n^{iéme}$ :

Soit $n$ un entier naturelle tel que : $n \geq 1$ et Soit $f$ une fonction définie sur $\mathrm{IR}^+$ par $f(x) = x^n$.

- $f$ est une fonction polynôme donc $f$ est continue sur IR par suite sur $\mathrm{IR}^+$.
- $f$ est strictement croissante sur $\mathrm{IR}^+$, du fait que $(\forall x \in \mathrm{IR}^+) : f'(x) = nx^{n-1} \geq 0$.

Alors $f$ admet une fonction réciproque $f^{-1}$ , appelée ***fonction racine n-ième***, définie sur $f(IR^+) = IR^+$.

- l'image du nombre $x$ de $\mathrm{IR}^+$ par $f^{-1}$ est note $\sqrt[n]{x}$ **et on a :**

$(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^+) \ : \ x^n = y \ \Leftrightarrow \ x = \sqrt[n]{y}$

### Remarques :

pour tout $x \in IR^+$ on a :

- $\sqrt[1]{x} = x$.
- $\sqrt[2]{x} = \sqrt{x}$.
- $\sqrt[3]{x}$ est appelée la racine cubique de $x$.

### Conséquences :

- $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^+)\ x^n = y \ \Leftrightarrow \ x = \sqrt[n]{y}$.
- $(\forall x \in \mathbb{R}^+)\ \sqrt[n]{x^n} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x$.
- $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^+)\ \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \ \Leftrightarrow \ x = y$.
- $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^+)\ \sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y} \ \Leftrightarrow \ x < y$.
- La fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est continue est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$.

### Exemples :

- $\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$
- $\sqrt[5]{5} > \sqrt[5]{3}$ parce que $5 > 3$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[5]{x} = +\infty$
- $(\forall x \in \mathbb{R}^+)\ x^5 = 32 \Leftrightarrow x = \sqrt[5]{32} = 2$.

### Application ⑩:

Résoudre dans $IR$ les équations suivantes :

| | | |
|---|---|---|
| **1.** $x^7 = 5$ | **2.** $x^6 = -2$ | **3.** $x^4 = 81$ |
| **4.** $x^5 = -32$ | **5.** $\sqrt[3]{3x-1} = 2$ | **6.** $\sqrt[5]{2x-3} < 2$ |

### Propriété :

Soient $a$ et $b$ deux réels positifs, et $n$ et $p$ sont deux entiers naturels non nuls.

- $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$.
- Si $b \neq 0$, alors $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
- $\sqrt[np]{a^p} = \sqrt[n]{a}$.
- $\left(\sqrt[n]{a}\right)^p = \sqrt[n]{a^p}$.
- $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[np]{a}$.

**Exemple :**

Simplifions le nombre : $A = \frac{\sqrt[4]{32} \times \sqrt[6]{27} \times \sqrt[4]{108}}{\sqrt{\sqrt[4]{144}}}$.

**Application ①①:**

**1.** Simplifier $A = \frac{\sqrt[3]{512}}{\sqrt[3]{64}}$ ; $B = \sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{729}}}$ et $C = \frac{\sqrt[15]{3^5} \times \sqrt[3]{9} \times \left(\sqrt[5]{9}\right)^3}{\sqrt[5]{3}}$.

**2.** Mettre en ordre croissant les nombres $\sqrt[4]{3}$; $\sqrt[3]{2}$ et $\sqrt{5}$

**Exercice ⑥:**

Simplifier les nombres suivants : $A = \frac{\sqrt[3]{\sqrt{256}} \times \sqrt[4]{64}}{\sqrt[5]{24300000} \times \sqrt[3]{1024}}$ et $B = \frac{\sqrt{\sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{9} \times \sqrt[4]{9}}}{\sqrt[5]{729} \times \sqrt{\sqrt{3}}}$.

**Propriété :**

Soit $f$ une fonction positive sur l'intervalle $I$ et $x_0 \in I$.

- Si $f$ est continue sur I alors $x \mapsto \sqrt[n]{f(x)}$ est continue sur $I$.
- Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \geq 0$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{l}$.
- Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = +\infty$.

( Les deux propriétés précédentes restent vraies au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$)

**Application ①②:**

**1.** On considère $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt[3]{3x^2 + 4}$.

a. Etudier la continuité de $f$ sur $\mathbb{R}$.

b. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

**2.** Calculer les limites suivantes :

**a.** $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x}$ **b.** $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x^3 + 1} - 2x$ **c.** $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x^3 + x + 1} - x$

**Exercice ⑦:**

Calculer les limites suivantes :

**1.** $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt[5]{x^3 + 24}$ **2.** $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[4]{x^5 - 3x^2 + 4}$ **3.** $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x^3 + x^2 + 2} - 2x$

**4.** $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x+8} - 2}{x}$ **5.** $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt{x}}{x - 1}$ **6.** $\lim\limits_{x \to 2} \frac{\sqrt[3]{x+25} - 3}{x^2 - 3x + 2}$

## VII. Puissances rationnelles d'un nombre réel strictement positif :

**Définition :**

Soient $x \in IR^+$ et $r$ un nombre rationnel tel que : $r = \frac{p}{q}$ $(p \in \mathbb{Z}, q \in IN^*)$.

Le nombre $a^r$, appelé ***puissance rationnelle de base a et d'exposant r***, est le nombre $\sqrt[q]{a^p}$ .

Autrement : $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$.

**Exemples :**

| | | | |
|---|---|---|---|
| ○ $3^{\frac{2}{7}} = \sqrt[7]{3^2}$ | ○ $3^{\frac{5}{2}} = \sqrt{3^5}$ | ○ $\sqrt[5]{6} = 6^{\frac{1}{5}}$ | ○ $2^{-\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{2^{-5}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2^5}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2^5}}$ |

**Propriété :**

Soient a et b deux réels strictement positifs et $r$ $et$ $r'$ deux rationnels.

- $a^r \times a^{r'} = a^{r+r'}$.
- $(a^r)^{r'} = a^{rr'}$.
- $\frac{1}{a^r} = a^{-r}$.
- $\frac{a^r}{a^{r'}} = a^{r-r'}$.
- $(ab)^r = a^r \times b^r$.
- $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$.

**Application ①③:**

Ecrire sous forme d'une puissance rationnelle les nombres $A = \frac{\sqrt[3]{4}\times 8^{\frac{1}{2}}\times\sqrt[5]{2}}{\sqrt[3]{2}\times\sqrt[6]{4}}$ $et$ $B = \frac{(27)^{\frac{2}{7}}\times(81)^{\frac{1}{4}}}{3^{\frac{17}{3}}}$