Cours 1 : Continuité d'une fonction numérique

Niveau : 2ème Année Bac PC et SVT

I. La continuité en un point - La continuité sur un intervalle 1

1) Continuité d'une fonction en un point 1

2) La continuité à droite - la continuité à gauche en un point 2

3) Continuité d'une fonction sur un intervalle 3

4) Continuité des fonctions usuelles 3

5) Fonction partie entière 3

II. Image d'un intervalle par une fonction continue 5

1) Image d'un intervalle par une fonction continue 5

2) Image d'un intervalle par une fonction continue et strictement monotone 5

III. Les opérations sur les fonctions continues 6

IV. Théorème des Valeurs intermédiaires 7

V. Principe de la Méthode de Dichotomie 8

VI. La fonction réciproque d'une fonction continue et strictement monotone 9

VII. Fonction racine $n^{ième}$ - Puissance rationnelle 11

1) Fonction racine $n^{ième}$ 11

2) Solutions de l'équation $x^n = a$ 11

3) Les opérations sur les racines $n^{ièmes}$ 12

4) Continuité et limite de la composée d'une fonction f et de la fonction racine $n^{ième}$ 12

5) Puissance rationnelle d'un nombre réel strictement positif 13

$$f^{-1} : x \longmapsto f^{-1}(x)$$

Prof : Bouyguir Taher

Continuité d'une fonction numérique - 2ème Bac PC et SVT -

I- La continuité en un point - La continuité sur un intervalle

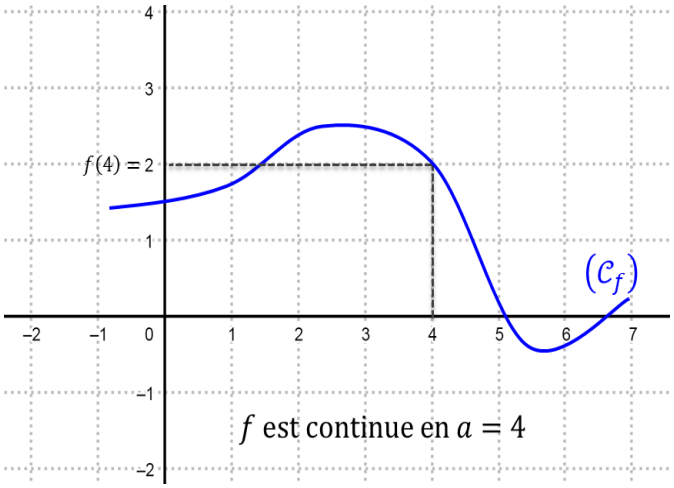
1) Continuité d'une fonction en un point

Définition 1 :

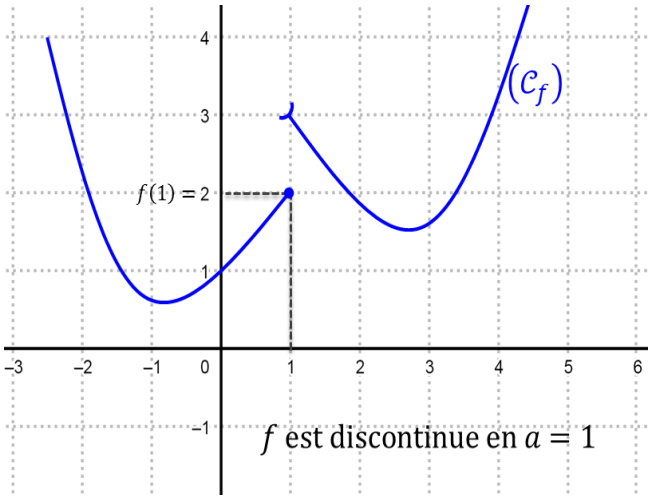
Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert I et soit a un réel de I.

On dit que f est ***continue*** en a si et seulement si : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Graphiquement, dire que f est continue en a signifie que sa courbe représentative $(\mathcal{C}_f)$ ne présente aucun saut au point $M(a; f(a))$.



f est continue en $a = 4$



f est discontinue en $a = 1$

Application 1 : On considère deux fonctions f et g définies par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1} \; ; x \neq 1 \\ f(1) = 2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} g(x) = \dfrac{x^2+x}{x} \; ; x \neq 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$$

① Etudier la continuité de f au point d'abscisse $a = 1$.

② Etudier la continuité de g au point d'abscisse $a = 0$.

Application 2 : Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \frac{-2x^2-x+1}{x+1} \; ; x \neq -1 \\ f(-1) = 1 \end{cases}$

La fonction f est-elle continue en -1 ?

2) La continuité à droite - la continuité à gauche en un point

Définition 2 :

- Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $[a; a+\alpha[$, avec $\alpha > 0$.
  On dit que f est ***continue*** à ***droite*** en a si et seulement si : $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = f(a)$.
- Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $]a-\alpha; a[$, avec $\alpha > 0$.
  On dit que f est ***continue*** à ***gauche*** en a si et seulement si : $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = f(a)$.

Application 3 :

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = x^2+1 & ; \quad x > 1 \\ f(x) = x + \frac{1}{x+1} & ; \quad 0 \le x \le 1 \\ f(x) = x+1 & ; \quad x < 0 \end{cases}$

Etudier la continuité de la fonction f à droite en 1 et à gauche en 0.

Application 4 :

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \sqrt{3x^2+4} & ; \quad x \ge 2 \\ f(x) = 3 + \sqrt{3-x} & ; \quad x < 2 \end{cases}$

Etudier la continuité de la fonction f à droite et à gauche en 2.

Propriété 1 : Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et $a \in I$.

La fonction f est **continue en** a si et seulement si f est **continue à droite et à gauche en** a.

Application 5 : Soit f la fonction numérique définie par : $\begin{cases} f(x) = \frac{|x|}{x} \; ; x \neq 0 \\ f(0) = -1 \end{cases}$

① Etudier la continuité de f en 0.

② Tracer la courbe de la fonction f dans un repère orthonormé.

Application 6 : Soit f la fonction numérique définie par : $\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{1-x}-1}{x} & ; \; x < 0 \\ f(x) = \sqrt{1+x} - \frac{1}{2} & ; \; x \ge 0 \end{cases}$

Etudier la continuité de f en 0.

Application 7 : Soit f la fonction numérique définie par : $\begin{cases} f(x) = \frac{x-\sqrt{x}}{x-1} \; ; \; x \in [0;1[\\ f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x-1}} \; ; \; x \in]1;+\infty[\\ f(1) = \frac{1}{2} \end{cases}$

Etudier la continuité de f en 1.

3) Continuité d'une fonction sur un intervalle

Définition 3 :

- La fonction f est continue sur l'intervalle ouvert $]a;b[$, si f est continue en tout points de $]a;b[$.
- La fonction f est continue sur l'intervalle $[a;b]$, si f est continue sur l'intervalle $]a;b[$ et continue à droite en a et à gauche en b

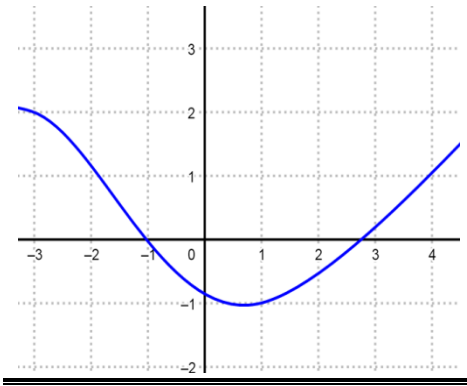
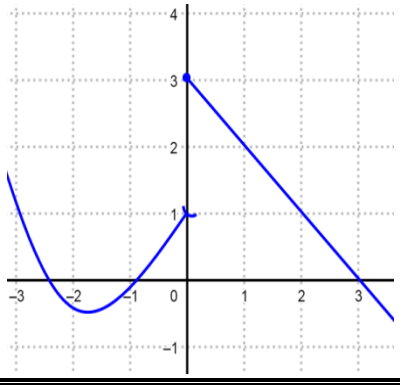
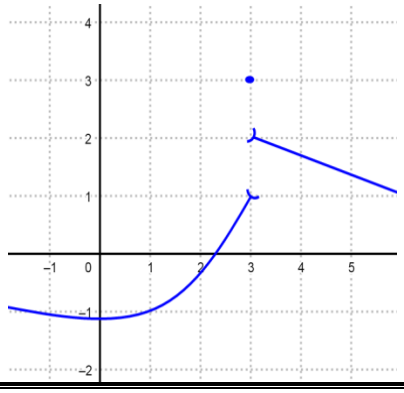
Remarques :

☑ De façon analogue, on définit la continuité de f sur les intervalles du type :

$$]a;b],\ [a;b[,\ [a;+\infty[\ \text{ et }\ ]-\infty;b].$$

☑ Graphiquement, la continuité d'une fonction f sur un intervalle I se traduit par une courbe en un seul morceau.

Application 8 : Répondre par Vrai ou Faux en se référant à la représentation graphique de f, dans chacun des cas suivants :

f est continue sur $[-2;3]$	f est continue sur $[0;3]$	f est continue sur $]0;5]$
		

4) Continuité des fonctions usuelles

Propriété 2 :

- Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$.
- Toute fonction rationnelle est continue sur tout intervalle inclus dans son domaine de définition.
- Les fonctions : $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$ sont continues sur $\mathbb{R}$.
- La fonction : $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0;+\infty[$.

5) Fonction partie entière

Définition 4 :

Soit x un nombre réel.
La partie entière de x est le plus grand entier relatif n qui est inférieur ou égal à x.
On note la partie entière de x par : $E(x)$.

Exemples :

- $E(3{,}5) = 3$
- $E(2{,}924) = 2$
- $E(0{,}001) = 0$
- $E(\sqrt{3}) = 1$
- $E\left(\frac{7}{3}\right) = 2$
- $E(8) = 8$
- $E(-3{,}5) = -4$
- $E(-2{,}924) = -3$
- $E(-0{,}001) = -1$
- $E(-\sqrt{3}) = -2$
- $E\left(-\frac{7}{3}\right) = -3$
- $E(-8) = -8$

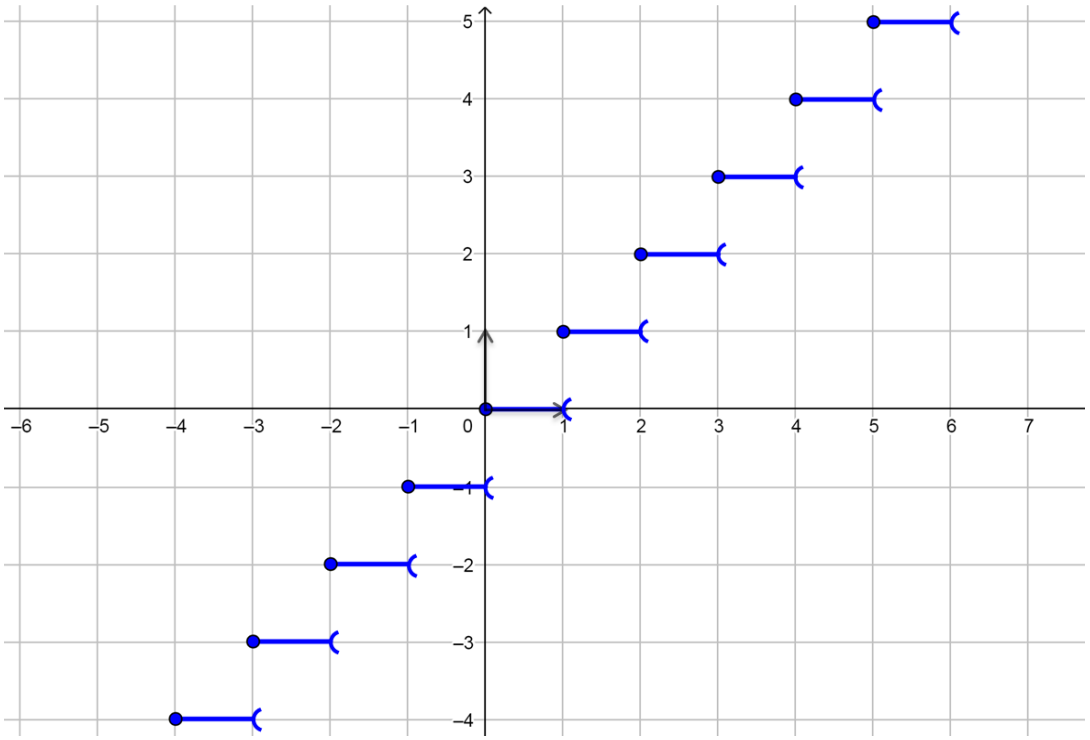
La courbe de la fonction partie entière :

Soit $n \in \mathbb{Z}$.

Si $n \leq x < n+1$ alors $E(x) = n$.

Par suite la fonction partie entière est constante sur l'intervalle $[n; n+1[$.

On obtient ainsi la courbe représentative ci-dessous.



Conséquences :

- ☑ $\forall n \in \mathbb{Z} :\ E(n) = n$.
- ☑ $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{Z}) :\ E(x+n) = E(x) + n$.
- ☑ $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) :\ E(x+y) \geq E(x) + E(y)$.
- ☑ La fonction partie entière n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.
- ☑ Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la fonction partie entière est continue sur l'intervalle $[n; n+1[$.
- ☑ Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la fonction partie entière est continue à droite en n et discontinue à gauche en n.
- ☑ Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la fonction partie entière est discontinue en n.

II- Image d'un intervalle par une fonction continue

1) Image d'un intervalle par une fonction continue

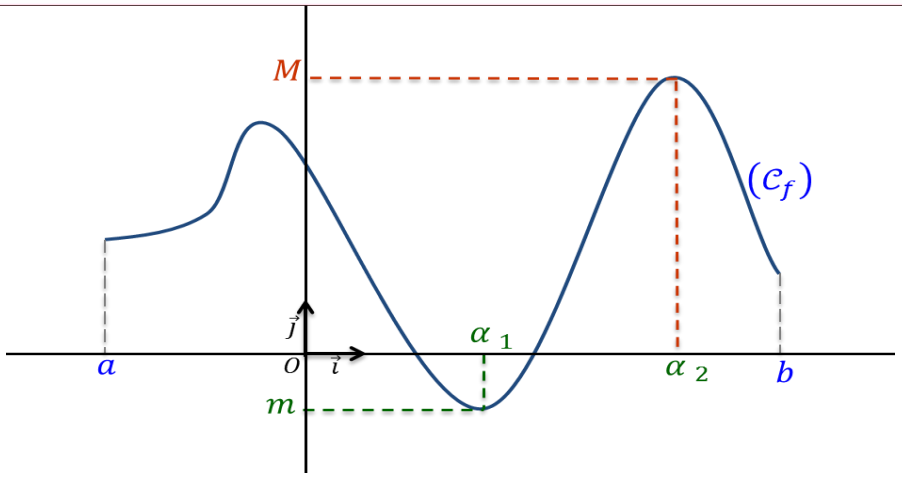
Activité : On considère la fonction f définie par : $f(x) = x^2$

① Tracer dans un repère orthonormé, $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de f.

② Déterminer $f([1;2])$; $f(]0;3])$; $f([-3;-1])$; $f([-1;2])$; $f([-3;3])$.

Propriété 3 :

- L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.
- Si une fonction f est continue sur un segment $[a;b]$, alors son image par f est le segment $[m;M]$ ou m et M sont, respectivement, les valeurs minimale et maximale de f sur le segment $[a;b]$.



2) Image d'un intervalle par une fonction continue et strictement monotone

Soit f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I. Le tableau suivant détermine $f(I)$, selon le sens de monotonie de f et le type d'intervalle I

L'intervalle I	Image de l'intervalle I par f	
	f strictement croissante sur I	f strictement décroissante sur I
$[a;b]$	$[f(a);f(b)]$	$[f(b);f(a)]$
$[a;b[$	$[f(a);\lim\limits_{x\to b^-} f(x)[$	$]\lim\limits_{x\to b^-} f(x);f(a)]$
$]a;b]$	$]\lim\limits_{x\to a^+} f(x);f(b)]$	$[f(b);\lim\limits_{x\to a^+} f(x)[$
$]a;b[$	$]\lim\limits_{x\to a^+} f(x);\lim\limits_{x\to b^-} f(x)[$	$]\lim\limits_{x\to b^-} f(x);\lim\limits_{x\to a^+} f(x)[$
$[a;+\infty[$	$[f(a);\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)[$	$]\lim\limits_{x\to +\infty} f(x);f(a)]$
$]-\infty;a[$	$]\lim\limits_{x\to -\infty} f(x);\lim\limits_{x\to a^-} f(x)[$	$]\lim\limits_{x\to a^-} f(x);\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)[$
$]-\infty;+\infty[$	$]\lim\limits_{x\to -\infty} f(x);\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)[$	$]\lim\limits_{x\to +\infty} f(x);\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)[$

Application 9 : Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \frac{1+x^2}{x}$, son tableau de variations est comme suit :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f	$-\infty$	↗	-2	↘	$+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

Déterminer $f([1;3])$; $f([-1;0[)$; $f(]-\infty;-3])$; $f(]0;+\infty[)$.

Application 10 : Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \frac{3x+4}{2x+1}$

① Déterminer D_f l'ensemble de définition de f.

② Etudier la monotonie de f sur l'intervalle $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right[$.

③ Déterminer l'image de l'intervalle $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right[$ par la fonction f.

Application 11 : Soit g la fonction numérique définie par : $g(x) = x^2 - 2x + 3$

Déterminer les images des intervalles $]-\infty;0[$; $[1;2]$ et $[-1;2]$ par la fonction g.

III. Les opérations sur les fonctions continues

Propriété 4 : Soient f et g deux fonctions numériques, définies sur un intervalle ouvert I et k un nombre réel.

Si f et g sont continues sur l'intervalle I alors :

- Les fonctions $f+g$; $f \times g$ et kf sont continues sur l'intervalle I.
- La fonction f^n $(o\grave{u}\ n \in \mathbb{N}^*)$ est continue sur l'intervalle I.
- La fonction $|f|$ est continue sur l'intervalle I.
- Si la fonction g est non nulle sur I ; alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues sur I.

Application 12 :

Etudier la continuité de la fonction $f: x \mapsto 2x^3 - 5x + (4x+1)\sqrt{x}$ sur $[0;+\infty[$.

Propriété 5 : *Continuité de la composée de deux fonctions*

Soient f et g deux fonctions numériques, à variables réelle, définies, respectivement, sur deux intervalles ouverts I et J tels que $f(I) \subset J$.

Si f est continue sur l'intervalle I et si g est continue sur l'intervalle J, alors la fonction composée $g \circ f$ est continue sur l'intervalle I.

Remarque : Si : $J = \mathbb{R}$, alors la condition $f(I) \subset J$ devient inutile.

Exemple : Etudions la continuité de la fonction $h: x \mapsto \sqrt{x^2-9}$ sur $[3;+\infty[$.

Conséquence : Si une fonction u est positive et continue sur un intervalle I alors la fonction $\sqrt{u}$ est continue sur l'intervalle I

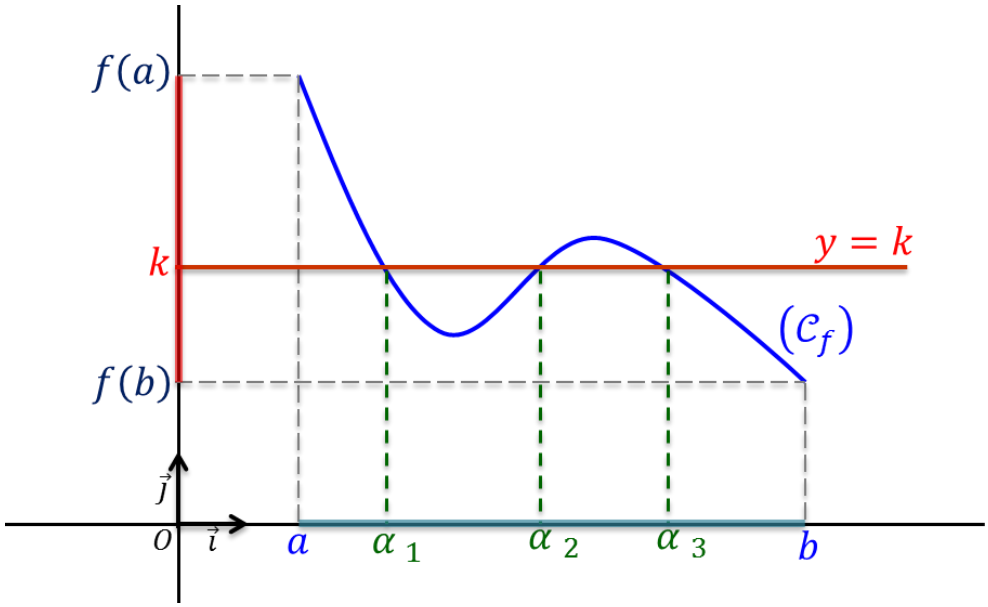
Exemple : Etudions la continuité de la fonction $k: x \mapsto \sqrt{\frac{1-x}{x-2}}$ sur $[1;2[$.

Application 13 : Soit f la fonction numérique définie par : $f(x)=\frac{\sqrt{x-2}}{4-x}$.

Montrer que la fonction f est continue sur l'intervalle $[2;4[$.

IV. Théorème des valeurs intermédiaires

Propriété 6 : Si une fonction f est continue sur un intervalle $[a;b]$, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un nombre α de $[a;b]$, tel que $f(\alpha)=k$.



En d'autres termes : l'équation $f(x)=k$ admet au moins une solution dans $[a;b]$ pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$.

Un exemple de la vie courante :

Si à 13h, je roule à 80 km/h, et qu'à 13h05, je roule à 120 km/h, alors, entre 13h et 13h05, il y a eu un ou plusieurs moments où j'ai roulé à 100 km/h.

Conséquences:

- Si f est continue sur l'intervalle $[a;b]$ tel que $f(a).f(b)<0$ alors l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution dans $]a;b[$.
- Si de plus, la fonction f est ***strictement monotone*** sur $[a;b]$, alors la solution est ***unique***.

Exemple :

« Montrons qu'une solution de l'équation $4x^3 - 6x^2 + 3x - 2 = 0$ est située entre 1 et 2 ».

Solution : Posons : $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x - 2$.

Nous sommes à la recherche d'un zéro de l'équation donnée, c'est-à-dire d'un nombre α situé entre 1 et 2 tel que $f(\alpha) = 0$.

On a : $f(1) = 4 - 6 + 3 - 2 = -1 < 0$ et $f(2) = 32 - 24 + 6 - 2 = 12 > 0$

Donc $f(1).f(2) < 0$.

De plus, f, étant une fonction polynomiale, est continue sur $\mathbb{R}$.
Donc f est continue sur l'intervalle $[1; 2]$.

Dans ces conditions, le théorème des valeurs intermédiaires affirme l'existence d'un nombre α entre 1 et 2 tel que $f(\alpha) = 0$.
Autrement dit, l'équation $4x^3 - 6x^2 + 3x - 2 = 0$ a au moins une solution dans l'intervalle $]1; 2[$.

Application 14 :

1. Montrer que l'équation $x^7 - x^4 + 3x - 2 = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $]0; 1[$
2. Montrer que l'équation $2\sin x = x$ admet au moins une solution dans $\left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[$
3. Montrer que l'équation $x^3 + x - 1 = 0$ admet une unique solution dans $]0; 2[$

V. Principe de la MÉTHODE DE DICHOTOMIE

Considérons une fonction f continue sur un intervalle $[a; b]$.
On suppose que l'équation $f(x) = 0$ admette une solution unique α dans $]a; b[$.
Pour déterminer un encadrement de α avec une précision donnée; on suit les étapes suivantes :

☑ On calcul $f(c_1)$ avec $c_1 = \frac{a+b}{2}$ le milieu de l'intervalle $]a; b[$.

Si $f(c_1).f(b) < 0$, la solution est dans l'intervalle $]c_1; b[$;

sinon la solution est dans l'intervalle $]a; c_1[$.

☑ On calcul $f(c_2)$ avec c_2 le milieu du nouvel intervalle, et continuer comme précédemment jusqu'à obtenir la précision voulue.

Application 15 :

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $[2; 4]$ par : $f(x) = x^3 - 3x^2 - 5$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution α dans l'intervalle $]2; 4[$.
2. Vérifier que le nombre 3 est le centre de l'intervalle $[2; 4]$, puis calculer $f(3)$, et déduire que : $3 < \alpha < 4$.
3. Calculer $f(3{,}5)$, et déduire un autre encadrement de α.
4. Par la même méthode, donner un encadrement de α d'amplitude 25×10^{-2}.

Application 16 :

1. Montrer que l'équation $x^3 + x - 1 = 0$ admet une unique solution α dans $]0;2[$
2. Donner un encadrement de α d'amplitude 25×10^{-2}

VI. La fonction réciproque d'une fonction continue et strictement monotone

Activité : Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $I = [1;4]$ par :

$$f(x) = x^2 - 2x$$

1. Montrer que la fonction f est continue et strictement monotone sur I.
2. Déterminer l'intervalle J l'image de I par la fonction f.
3. Soient $x \in J$ et $y \in I$; montrer que : $f(y) = x \quad \Leftrightarrow \quad y = 1 + \sqrt{x+1}$.

Propriété 7 : Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I, alors pour tout y de $f(I)$, l'équation $f(x) = y$ admet une seule solution dans l'intervalle I.

Définition 5 : Soient f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I et J l'image de I par la fonction f.

La relation qui à chaque élément y de l'intervalle J associe l'élément x de l'intervalle I tel que $f(x) = y$, est une fonction définie de J vers I. Cette fonction est appelée ***la fonction réciproque*** de la fonction f, elle est notée $\boldsymbol{f^{-1}}$.

Conséquences : Soit f une fonction continue et strictement monotone sur l'intervalle I et f^{-1} sa fonction réciproque, on a :

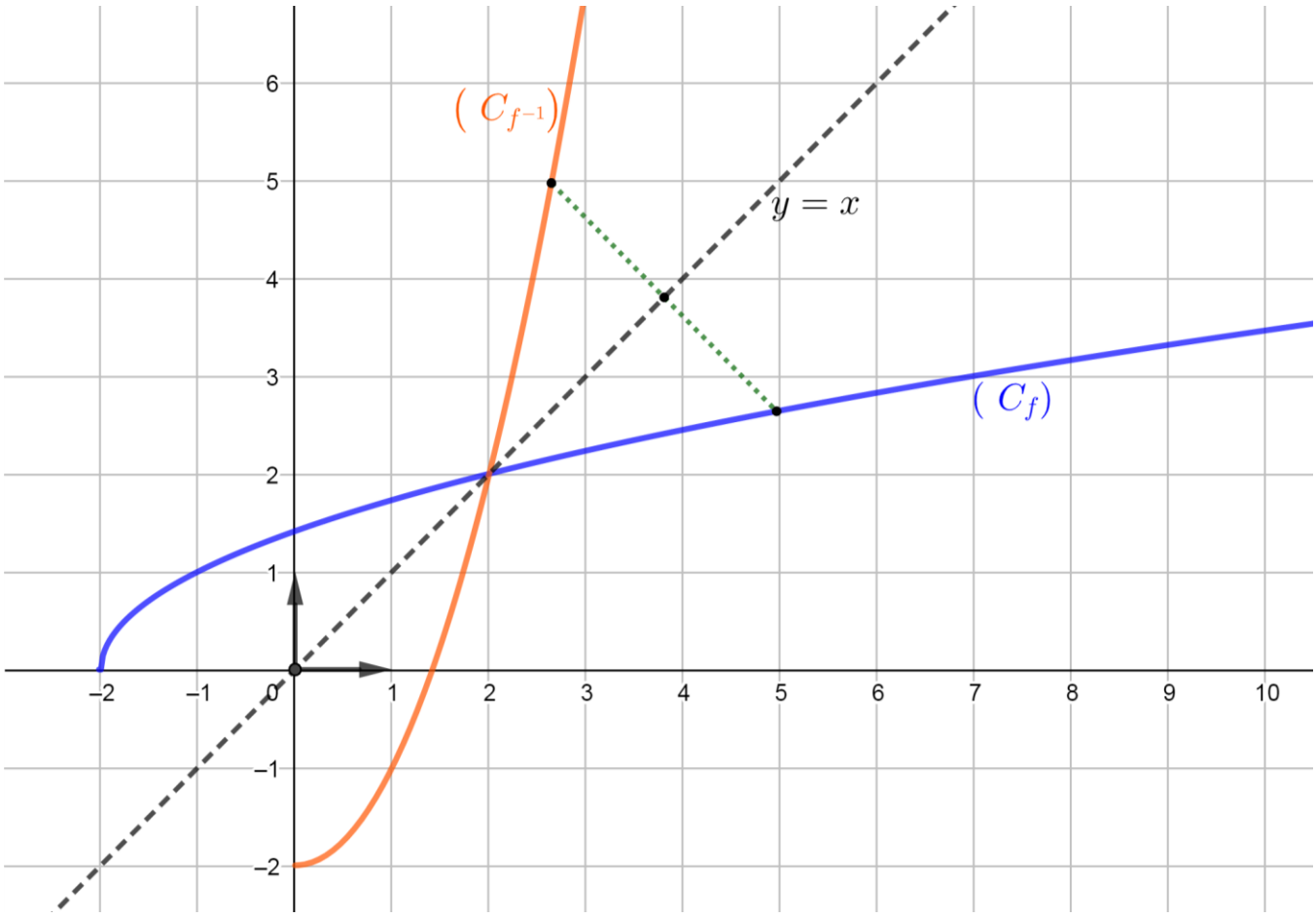
- $\begin{cases} f^{-1}(x) = y \\ x \in f(I) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(y) = x \\ y \in I \end{cases}$
- $\forall x \in I;\ f^{-1} \circ f(x) = x$
- $\forall x \in f(I);\ f \circ f^{-1}(x) = x$

Application 17 : Soit f la fonction définie sur $I =]2;+\infty[$ par $f(x) = \frac{3x}{x-2}$.

1. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1}définie sur un intervalle J à déterminer .
2. Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout x de J

Propriété 8 : Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I et f^{-1} sa fonction réciproque, alors :

- La fonction f^{-1} est **continue** sur $f(I)$.
- La fonction f^{-1} est strictement monotone sur $f(I)$ et elle a **le même sens de variation** que f sur I.
- La courbes représentatives de f et f^{-1}, dans le plan muni d'un repère orthonormé, sont **symétriques** par rapport à la $1^{ère}$ bissectrice (la droite d'équation $y = x$).



Remarque : Si $M(x; f(x)) \in (C_f)$ alors $M'(f(x); x) \in (C_{f^{-1}})$.

Application 18 : Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I = [-1; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x+1}$.

1. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1}définie sur un intervalle J à déterminer .
2. Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout x de J
3. Tracer dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, $(C_{f^{-1}})$ la courbe représentative de f^{-1} puis en déduire celle de f

VII. Fonction racine $n^{ième}$ - Puissance rationnelle

1) Fonction racine $n^{ième}$

Soit n un entier naturel non nul.

La fonction $f : x \longmapsto x^n$ est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$, donc f admet une fonction réciproque définie sur l'intervalle $J = f([0; +\infty[) = [0; +\infty[$.

Définition 6 : Soit n un entier naturel non nul.

- ✓ La fonction réciproque de la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par : $x \longmapsto x^n$ est appelée **fonction racine $n^{ième}$** notée $\sqrt[n]{\ }$.
- ✓ L'image d'un réel positif x par cette fonction est notée $\sqrt[n]{x}$.
- ✓ Le nombre $\sqrt[n]{x}$ se lit racine $n^{ième}$ de x ou bien racine d'ordre n de x.

Remarques :

- ☑ Pour tout nombre réel positif x, on a : $\sqrt[1]{x} = x$ et $\sqrt[2]{x} = \sqrt{x}$.
- ☑ Le nombre $\sqrt[3]{x}$ se lit aussi « *racine cubique de x* ».

Propriété 9 : Soit n un entier naturel non nul.

- ➢ La fonction $x \longmapsto \sqrt[n]{x}$ est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
- ➢ On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$.
- ➢ Dans un repère orthonormé, la courbe de la fonction $x \longmapsto \sqrt[n]{x}$ est symétrique de la courbe de la fonction $x \longmapsto x^n$ par rapport à la droite d'équation : $y = x$.

Conséquences : Soit n un entier naturel non nul.

- ★ $\forall x \in \mathbb{R}^+ : \left(\sqrt[n]{x}\right)^n = \sqrt[n]{x^n} = x$.
- ★ $\forall x \in \mathbb{R}^+; \forall y \in \mathbb{R}^+ : x^n = y \iff x = \sqrt[n]{y}$.
- ★ $\forall x \in \mathbb{R}^+; \forall y \in \mathbb{R}^+ : \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \iff x = y$.
- ★ $\forall x \in \mathbb{R}^+; \forall y \in \mathbb{R}^+ : \sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y} \iff x < y$.

2) Solutions de l'équation $x^n = a$

Activité : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$x^5 = 243$; $x^7 = -3$; $x^4 = 7$; $x^6 = -2$

Propriété 10 :

L'ensemble des solutions de l'équation $x^n = a$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ est :

Le signe de a \ La parité de n	n pair	n impair
$a \geq 0$	$\mathcal{S} = \{-\sqrt[n]{a}; \sqrt[n]{a}\}$	$\mathcal{S} = \{\sqrt[n]{a}\}$
$a < 0$	$\mathcal{S} = \phi$	$\mathcal{S} = \{-\sqrt[n]{-a}\}$

3) Les opérations sur les racines $n^{ièmes}$

Propriété 11 :

Soient a et b deux éléments de $\mathbb{R}^+$ et n et p deux éléments de $\mathbb{N}^*$; on a :

- $\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$
- $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ $(si\ b \neq 0)$
- $\sqrt[np]{a^p} = \sqrt[n]{a}.$
- $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[np]{a}$

Application 19 :

1. Montrer que : $\sqrt[n]{a}.\sqrt[p]{a} = \sqrt[np]{a^{n+p}}$
2. Comparer les nombres $\sqrt[5]{2}$ et $\sqrt[7]{3}$

4) Continuité et limite de la composée d'une fonction f et de la fonction racine $n^{ième}$

Propriété 12 : Soit f une fonction **positive** sur un intervalle I et $a \in I$

- Si la fonction f est continue sur I, alors la fonction $\sqrt[n]{f}$ est continue sur I .
- Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$, alors $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{l}$.
- Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = +\infty$.

Remarque :

Les résultats de la propriété précédente restent aussi valables lorsque x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ ou vers a à droite ou vers a à gauche.

Application 20 : Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 8}$

1. Déterminer $\mathcal{D}_f$ l'ensemble de définition de la fonction f
2. Montrer que la fonction f est continue sur $\mathcal{D}_f$
3. Calculer les limites : $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

5) Puissance rationnelle d'un nombre réel strictement positif

Définition 7 :

Soient x un nombre réel strictement positif et r un nombre rationnel.

On appelle **puissance rationnelle** du nombre x d'exposant r le nombre noté x^r, défini par : $x^r = \sqrt[q]{x^p}$ où $r = \dfrac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$,

Ainsi : $\sqrt[q]{x^p} = x^{\frac{p}{q}}$

Remarque :

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$, on a : $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ et $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$

Et en général : $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

Propriété 13 : Soit r et r' deux éléments de $\mathbb{Q}^*$ et a et b deux éléments de $\mathbb{R}_+^*$, on a :

- $a^r . a^{r'} = a^{r+r'}$
- $\dfrac{a^r}{a^{r'}} = a^{r-r'}$
- $(a^r)^{r'} = a^{r.r'}$
- $a^{-r} = \dfrac{1}{a^r}$
- $a^r . b^r = (a.b)^r$
- $\dfrac{a^r}{b^r} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^r$

Application 21 :

Simplifier les nombres :

$$\mathbf{A} = \frac{\sqrt[4]{32}.\sqrt[6]{27}.\sqrt[4]{108}}{\sqrt[4]{6}.} \quad \text{et} \quad \mathbf{B} = \frac{\sqrt[3]{1024}.\sqrt[5]{32}}{\sqrt[4]{64}.\sqrt[3]{\sqrt{256}}.\sqrt{18}}$$