Dénombrement

Niveau : Première année baccalauréat Sciences économiques

Professeur : Taher Bouyguir

e-mail : Taher.bouyguir@gmail.com

Table de matière

1. Le principe fondamentale de dénombrement **2**

2. Les Permutations **2**

2.1 Les Permutations simples 2

2.1.1 Les permutations avec répétition 3

3. Les Arrangements **3**

3.1 Les Arrangements simple 3

3.2 Les Arrangements avec répétition 4

4. Les Combinaisons - Coefficients binomiaux **4**

4.1 Les Combinaisons 4

4.2 Binôme de Newton 5

4.3 Triangle de Pascal 6

1. Le principe fondamentale de dénombrement

Activité

Avant de venir au lycée, vous ouvrez votre armoire et les seules vêtements propres que vous avez sont ; deux chemises, 3 jackets et 4 pantalons.

Combien de tenus pouvez-vous porter ?

Propriété

Si une opération globale peut se décomposer en k opérations élémentaires successives, ces derniers peuvent s'effectuer respectivement de n_1, n_2,...., n_k manière, alors l'opération globale peut se faire de $n_1 \times n_2 \times ... \times n_k$

Exercice d'application

Pour se connecter un son compte Facebook ;

- Ahmed utilise un mots de passe de six caractère; et il utilise que des chiffres.
- Hasna utilise un mots de passe de six caractère; et elle utilise des chiffres et des lettres.
- Ali utilise un mots de passe de six caractère; et il utilise des chiffres, des lettres et les symboles @ , # , & , §.

Quel mots de passe est le plus sécurisé parmi les mots de passe ci-dessus.

N.B : On dit que un mots de passe $\mathcal{A}$ est plus sécurisé qu'un mots de passe $\mathcal{B}$ si les façons de composer $\mathcal{A}$ sont supérieur à les façons pour composer $\mathcal{B}$

2. Les Permutations

2.1 Les Permutations simples

Activité

- De combien façon pouvez-vous ranger 3 livres sur un étagère ?
- De combien façon pouvez-vous ranger 4 livres sur un étagère ?
- De combien façon pouvez-vous ranger 5 livres sur un étagère ?

Définition

Tout classement ordonnée de n éléments distincts est une permutation de ces n éléments.

Propriété

Les nombres de permutations de n éléments est : $n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times 2 \times 1$ et on le note $n!$.

Et on écris :

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times ... \times 2 \times 1$$

Remarque

- Le nombre $n!$ se lis : **n factoriel**.
- $0! = 1$

Exercice d'application

Calculer :

$$4! \times 3! \quad :: \quad 7! - 5! \quad :: \quad \frac{5!}{2!1!2!}$$

Exercice d'application

Combien y-a-t-il d'anagrammes du mots GESTION.

2.1.1 Les permutations avec répétition

Propriété

Le nombre de permutations que l'on peut constituer si certains des éléments sont identiques est plus petit que si tous les éléments sont distincts. Lorsque seuls k éléments sont distincts ($k \preceq n$), chacun d'eux apparaissant n_1,n_2,n_3,...n_k dois avec $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$ et $n_i \succeq 1$, on a :

$$\overline{P_n}(n_1, n_2, .., n_k) = \frac{n!}{n_1! \times n_2! \times ... \times n_k!}$$

Exemple

Combien de mots peut-on écrire avec les lettres : a,a,b,e,e ?

On la lettre 'a' apparait deux fois, la lettre 'e' apparait deux fois, et la lettre 'b' apparait une seule fois. Alors Le nombre de mots qu'on peut écrire avec ces lettres est :

$$\overline{P_5}(2, 1, 2) = \frac{5!}{2! \times 1! \times 2!} = 30$$

Exercice d'application

Combien d'anagrammes peut-on former avec le mots "excellence" ?

3. Les Arrangements

3.1 Les Arrangements simple

Activité

On cherche à faire une commission de 5 élevés pour représenter la classes, on choisi les élèves un par un.

Combien de commission peut-on faire ?

Définition

Une arrangement est une collection de p objets pris **successivement** parmis n éléments en tenant compte de **l'ordre d'apparition**.

Propriété

Le nombre d'arrangements de p éléments distincts choisis parmi n éléments est noté A_n^p. et on a :

$$A_n^p = n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Exercice d'application

Calculer :

$$A_4^2 \quad :: \quad A_5^3 \times A_8^2 \quad :: \quad \frac{A_9^5}{A_9^3}$$

Exercice d'application

Après les prolongations d'un match de foot-ball, l'entraineur doit choisir les cinq tireurs de pénaltys parmi les onze joueurs et l'ordre de passage de chacun.

Combien de choix a-t-il ?

3.2 Les Arrangements avec répétition

Propriété

Le nombre d'arrangements de p éléments choisis parmi n avec répétitions possible est noté $\overline{A_n^p}$. Et on a :

$$\overline{A_n^p} = n^p$$

Exemple

Les $3^2 = 9$ arrangements avec répétitions de 2 éléments choisis parmi : a,b,c :

$$aa \quad ab \quad ac \quad ba \quad bb \quad bc \quad ca \quad cb \quad cc$$

Exercice d'application

Combien de numéros de téléphone peuvent existe-il au Maroc ?

4. Les Combinaisons - Coefficients binomiaux

4.1 Les Combinaisons

Définition

Une combinaison est une collection de p objets pris **simultanément** parmi n **sans tenir compte de l'ordre d'apparition**

Propriété

Le nombres de combinaisons de p éléments choisis parmi n est noté C_n^p, et on a :

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Exemple

Un tournois sportif compte 8 équipes engagées. chaque équipe doit rencontrer toutes les autres une seule fois. Combien doit-on organiser de match ?

Le nombre des matchs qu'on doit organiser est :

$$C_8^2 = \frac{8!}{2!(8-2)!} = 28 \text{ rencontres possibles}$$

Exercice d'application

Calculer :

$$C_3^2 \quad C_6^4 \quad C_3^2 \times C_3^1$$

Exercice d'application

Dans une classe de 32 élèves, on compte 19 garçons et 13 filles. On doit élire deux délégués.

1. Quel est le nombre de choix possible ?
2. Quel est le nombre de choix si l'on impose un garçon et une fille ?
3. Quel est le nombre de choix si l'on impose 2 garçons ?
4. Quel le nombre de choix si l'on impose 2 filles ?

4.2 Binôme de Newton

Propriété

- $C_n^p = C_n^{n-p}$
- $C_n^{p-1} + C_n^p = C_{n+1}^p$

Propriété

Soient a et b deux nombres réels non nuls, et n un nombre naturel non nul, on a :

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 b a^{n-1} + \ldots + C_n^{n-1} b^{n-1} a + C_n^n b^n$$

Exemple

Calculons $(a+b)^4$:

$$(a+b)^4 = C_4^0 a^4 + C_4^1 a^3 b + C_4^2 a^2 b^2 + C_4^3 a^1 b^3 + C_4^4 b^4$$
$$= a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Exercice d'application

Calculer : $(a+2)^5$ et $(a+b)^5$

4.3 Triangle de Pascal

Définition

Le triangle de Pascal se construit ligne par ligne : chaque terme est l'addition des deux nombres de la ligne supérieure qui lui sont adjacents

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1