Cours : Dérivation - 1BACSEG

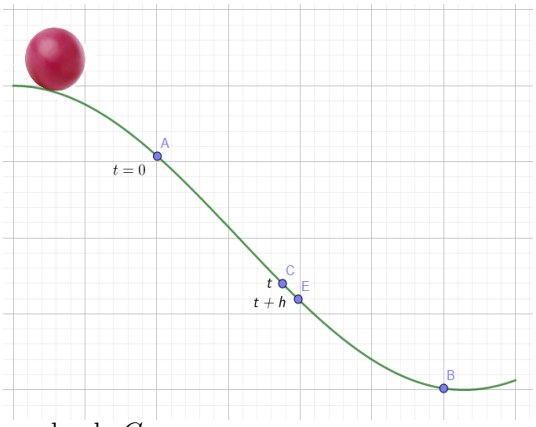
Ce Cours est présenté par le Professeur : Bouyguir Taher

1 Introduction : Notion de vitesse instantanée

Une balle se déplace sur une pente (voir le figure ci-contre) de A à B , sachant que $AB = 120m$.

Dans cette expérience , la balle a parcourue la distance AB dans $\triangle t = 60s$, alors maintenant on peut calculer la vitesse moyenne V_m de cette boule . En effet : $V_m = \frac{AB}{\triangle t} = \frac{120}{60} = 2m/s$. c-à-d : chaque seconde, la balle parcours 2 meters .

Jusqu'à maintenant les choses sont claire !



On suppose un point C entre A et B , et un autre point E très proche de C.

On lance la balle en A ($t = 0$ le temps est nul) , elle arrivera au point C à un certain moment que l'on note t , et elle attendra le point E en $t + h$ (voir le figure) , avec h est très proche de 0 (car la distance entre C et E est très proche) .

On pose $d(t)$: la distance que la balle parcours entre A est C et $d(t + h)$: la distance que la balle parcours entre A est E.

Alors maintenant on peut calculer la vitesse instantanée V_i de la boule au point C , En effet : $V_i \simeq \frac{d(t+h)-d(t)}{(t+h)-t} = \frac{d(t+h)-d(t)}{h}$, puisque h est infiniment petit, donc on tend h vers 0 et on trouve : $V_i = \lim_{h\to 0} \frac{d(t+h)-d(t)}{h}$

par changement de variable : on pose $x = t + h$ donc si h tend vers 0 on a : x tend vers t et $h = x - t$. finalement on trouve : $V_i = \lim_{x\to t} \frac{d(x)-d(t)}{x-t}$; V_i est par définition **la dérivée de la fonction d en t** .

Voici les grandes lignes qu'on va traiter dans ce cours :

1. **Dérivabilité d'une fonction en un point**
2. **Dérivabilité à droite - Dérivabilité à gauche**
3. **Dérivabilité d'une fonction sur un intervalle**
4. **Tableau des dérivées usuelles**
5. **Opérations sur les fonctions dérivables**
6. **Applications de la dérivation**

2 Dérivabilité d'une fonction en un point a

2.1 Nombre dérivé en un point

Définition :

Soit f une fonction définie un intervalle ouvert I et $a \in I$.

On dit que f est **dérivable** en a s'il existe un réel ℓ tel que : $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \ell$.

Le nombre ℓ est appelé *le nombre dérivé* de la fonction f en a . Il est noté $f'(a)$, on écrit :

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) .$$

Exemple :

1. On considère la fonction $f : x \longmapsto x^2 + x$, étudions la dérivabilité de f en $a = 3$
2. On considère la fonction $g : x \longmapsto \sqrt{3+x}$, étudions la dérivabilité de g en $a = 1$

♠ Solution

1. On a $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{x^2+x-3^2-3}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+4)}{x-3} = \lim_{x\to 3}(x+4) = 7 \in \mathbb{R}$.
   Alors f est dérivable en 3 est $f'(3) = 7$
2. On a $\lim_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} = \lim_{x\to 1} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{3+x}-\sqrt{3+1}}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{3+x}-2}{x-1} =$
   $\lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt{3+x}-2)(\sqrt{3+x}+2)}{(x-1)(\sqrt{3+x}+2)} = \lim_{x\to 1} \frac{3+x-4}{(x-1)(\sqrt{3+x}+2)} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{3+x}+2)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt{3+x}+2} = \frac{1}{4} \in \mathbb{R}$.
   Alors g est dérivable en 1 est $g'(1) = \frac{1}{4}$

2.2 Interprétation géométrique du nombre dérivé

Propriété :

f une fonction dérivable en a.

La droite (T) d'équation : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ est appelée **la tangent de la courbe** $(\mathcal{C}_f)$ de f au point d'abscisse a

Exemple :

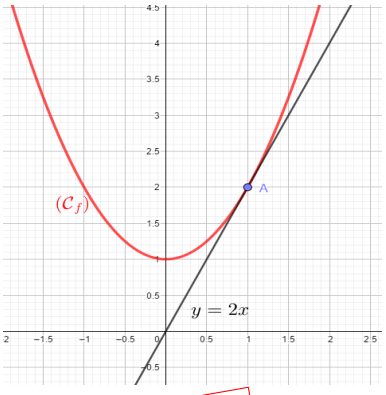
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 + 1$.

f est dérivable en 1 en effet :

$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2+1-1^2-1}{x-3} =$
$\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2 \in \mathbb{R}$.

Alors f est dérivable en 1 est $f'(1) = 2$.

donc l'équation de la tangent du courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point A d'abscisse 1 est : $y = f'(1)(x-1) + f(1) = 2(x-1) + 2 = 2x$ d'où $y = 2x$



Déterminer l'équation de la tangent au point d'abscisse a des fonctions suivantes : à faire !

a) $f(x) = x^2 + x$; $a = 3$ b) $g(x) = \sqrt{3+x}$; $a = 1$ c) $h(x) = \sqrt{x}$; $a = 4$

2.3 Approximation affine locale

Définition :

f une fonction dérivable en a.

la fonction affine : $x \longmapsto f'(a)(x-a)+f(a)$ s'appelle l'approximation affine de f au voisinage de a , On écrit alors : $f(x) \simeq f'(a)(x-a)+f(a)$ au voisinage de a.

Exemple :

La fonction $f(x)=x^2-x$ est dérivable en 2 (simple a vérifier) et on a $f'(2)=3$.

donc l'approximation de f au voisinage de 2 est la fonction affine : $x \longmapsto 3(x-2)+2$ d'où $x \longmapsto 3x-4$, alors au voisinage de 2 on a : $f(x) \simeq 3x-4$

3 Dérivabilité à droite - Dérivabilité à gauche

Définition :

▸ Soit f une fonction définie sur un intervalle de type $[a;a+r[$ où $r \in \mathbb{R}^{+*}$.

On dit que f est **dérivable à droite de** a s'il existe un réel ℓ_1 , tel que : $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \ell_1$.

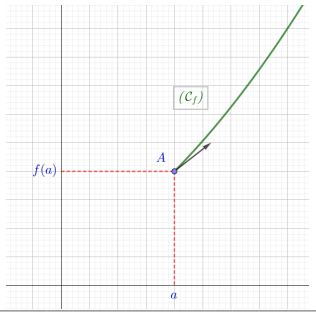
Le nombre ℓ_1 est appelé le nombre dérivé de la fonction f à droite en a. Il est noté $f'_d(a)$.

Interprétation géométrique

Si f est une fonction dérivable à droite au point a , alors sa courbe représentative $(\mathcal{C}_f)$ admet une demi-tangente au point $A(a;f(a))$ de coefficient directeur $f'_d(a)$.

L'équation de demi-tangente est donnée par :

$$\begin{cases} y = f'_d(a)(x-a)+f(a) \\ x \geq a \end{cases}$$



▸ Soit f une fonction définie sur un intervalle de type $]a-r;a]$ où $r \in \mathbb{R}^{+*}$.

On dit que f est **dérivable à gauche de** a s'il existe un réel ℓ_2 , tel que : $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \ell_2$.

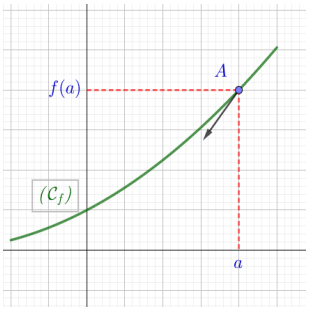
Le nombre ℓ_2 est appelé le nombre dérivé de la fonction f à droite en a. Il est noté $f'_g(a)$.

Interprétation géométrique

Si f est une fonction dérivable à gauche au point a , alors sa courbe représentative $(\mathcal{C}_f)$ admet une demi-tangente au point $A(a;f(a))$ de coefficient directeur $f'_g(a)$.

L'équation de demi-tangente est donnée par :

$$\begin{cases} y = f'_g(a)(x-a)+f(a) \\ x \leq a \end{cases}$$



Propriété :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$.

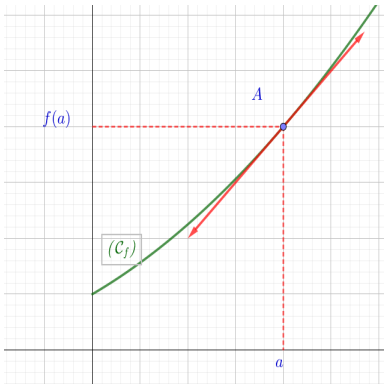
La fonction f est dérivable en a si, et seulement si elle est dérivable à droite et à gauche de a, avec $f'_d(a) = f'_g(a)$, et alors : $f'_d(a) = f'_g(a) = f'(a)$.

Interprétation géométrique

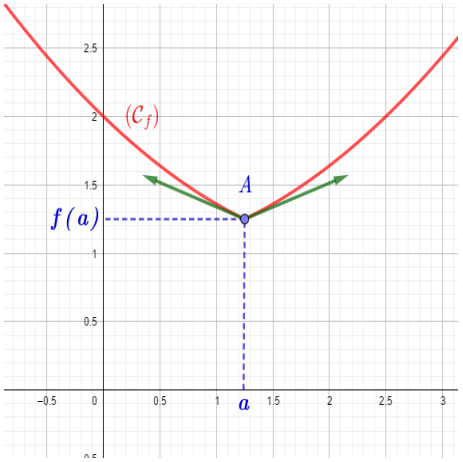
♣ Si f est une fonction dérivable à droite et à gauche de a telle que $f'_d(a) = f'_g(a)$ alors sa courbe représentative $(\mathcal{C}_f)$ admet une tangente au point $A(a; f(a))$ de coefficient directeur $f'(a)$.

L'équation de la tangente est donnée par :

$y = f'(a)(x - a) + f(a)$



♣ Si f est une fonction dérivable à droite et à gauche de a telle que $f'_d(a) \neq f'_g(a)$ alors f n'est dérivable en a. on dit que $A(a; f(a))$ est un point anguleux de $(\mathcal{C}_f)$.



Exemple :

1. On considère la fonction f définie par : $f(x) = x^2 + |x|$.

   ▸ Pour la dérivabilité à droite de 0 , on a : $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+x}{x} = \lim_{x\to 0^+}(x+1) = 1$.

   Donc f est dérivable à droite de 0 et $f'_d(0) = 1$.

   ▸ Pour la dérivabilité à gauche de 0 , on a : $\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2-x}{x} = \lim_{x\to 0^-}(x-1) = -1$.

   Donc f est dérivable à gauche de 0 et $f'_g(0) = -1$.

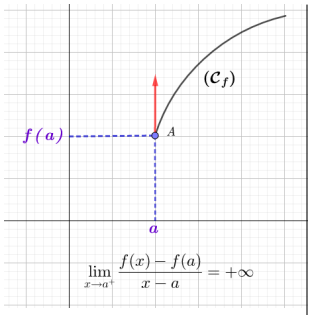
   Et puisque $f'_d(0) \neq f'_g(0)$ alors f n'est dérivable en 0. Par conséquence, la courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet au point $O(0;0)$ deux demi-tangentes définies par :

   $$\text{demi-tangente à droite } \begin{cases} y = x \\ x \geq 0 \end{cases} \text{ ; demi-tangente à gauche } \begin{cases} y = -x \\ x \leq 0 \end{cases}$$

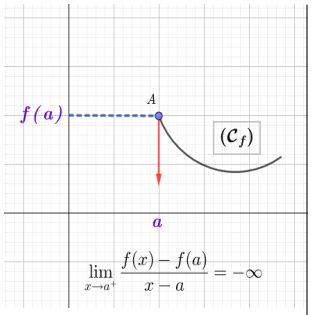
2. Étudier la dérivabilité à droite et à gauche en 0 de la fonction g : $g(x) = x^2 - |x|$ et interpréter géométriquement les résultats

Remarque :

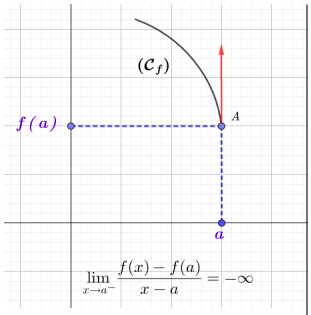
• Si $f'_d(a) = 0$ (resp. $f'_g(a) = 0$), alors $(\mathcal{C}_f)$ admet une demi tangente horizontale, c-à-d, parallèle à l'axe des abscisses. • Si $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \pm\infty$ ou $\lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \pm\infty$, alors $(\mathcal{C}_f)$ admet une demi tangente verticale au point $A(a; f(a))$, c-à-d, parallèle à l'axe des ordonnées.



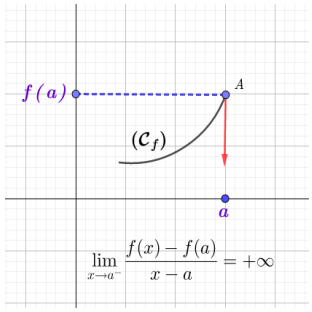
$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$



$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty$



$\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty$



$\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$

Application

1. Dans chacun des cas suivants, étudier la dérivabilité de la fonction f à droite et à gauche au point a puis définir les demi-tangentes de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ de la fonction f au point $A(a;f(a))$.

   a) $f(x)=|x+3|$; et $a=-3$

   b) $f(x)=\left|x^2-2x\right|$; et $a=2$

   c) $\begin{cases} f(x)=x^3-x & \text{si } x\geq -1 \\ f(x)=x^2+x & \text{si } x<-1 \end{cases}$; et $a=-1$

   d) $\begin{cases} f(x)=x^2-3x+1 & \text{si } x\geq 3 \\ f(x)=x-2 & \text{si } x<3 \end{cases}$; et $a=3$

2. Soit g la fonction définie par : $g(x)=\sqrt{x^2-5x+6}$

   (a) Montrer que : $\mathcal{D}_g=]-\infty;2]\cup[3;+\infty[$

   (b) Étudier la dérivabilité de g à droite en 3 et à gauche en 2.

   (c) Interpréter géométriquement les résultats de la question b).

3. Soit h la fonction définie par : $h(x)=\begin{cases} x^2-1 & \text{si } x\geq 0 \\ x^3-2x-1 & \text{si } x<0 \end{cases}$

   (a) Étudier la dérivabilité de h à droite et à gauche en 0.

   (b) Interpréter géométriquement les résultats de la question a).

4 Dérivabilité d'une fonction sur un intervalle

4.1 Fonction dérivée

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I.

On dit que f est dérivable sur I, s'elle est dérivable en tout point de I.

La fonction dérivée de f, est la fonction qui à tout x de I on associe le réel $f'(x)$

Cette fonction est notée f'

Exemple

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = x\sqrt{x}$.

   Montrons que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et déterminons sa fonction dérivée.

   ♠ Solution

   On a pour tout $a \in \mathbb{R}^+$:

   $$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{x\sqrt{x}-a\sqrt{a}}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x^3}-\sqrt{a^3}}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{(\sqrt{x^3}-\sqrt{a^3})(\sqrt{x^3}+\sqrt{a^3})}{(x-a)(\sqrt{x^3}+\sqrt{a^3})} =$$
   $$\lim_{x\to a} \frac{x^3-a^3}{(x-a)(\sqrt{x^3}+\sqrt{a^3})} = \lim_{x\to a} \frac{(x-a)(x^2+xa+a^2)}{(x-a)(\sqrt{x^3}+\sqrt{a^3})} = \lim_{x\to a} \frac{x^2+xa+a^2}{\sqrt{x^3}+\sqrt{a^3}} = \frac{3}{2}\sqrt{a}.$$

   Par conséquent, la fonction f est dérivable en tout point a de $\mathbb{R}^+$ et de plus : $f'(a) = \frac{3}{2}\sqrt{a}$.

   En résumé la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et on a : $(\forall x \in \mathbb{R}^+)\,;\ f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^2 + x$.

   Montrons que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminons sa fonction dérivée.

   ♠ Solution

   On a pour tout $a \in \mathbb{R}$:

   $$\lim_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{x^2+x-(a^2+a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{x^2+x-a^2-a}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{x^2-a^2+x-a}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{(x-a)(x+a)+(x-a)}{(x-a)} =$$
   $$\lim_{x\to a} \frac{(x-a)(x+a+1)}{x-a} = \lim_{x\to a} x + a + 1 = 2a + 1.$$

   Par conséquent, la fonction g est dérivable en tout point a de $\mathbb{R}$ et de plus : $f'(a) = 2a + 1$.

   En résumé la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $(\forall x \in \mathbb{R})\,;\ f'(x) = 2x + 1$

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert $[a; b]$.

On dit que f est dérivable sur $[a; b]$, si elle est dérivable sur l'intervalle ouvert $]a; b[$ et dérivable à droite en a et à gauche en b.

Application

Dans chacun des cas suivants, étudier la dérivabilité de la fonction f sur l'intervalle I puis définir sa fonction dérivée f' sur l'intervalle I : à faire !

a) $f(x) = 5x - 2$ et $I = \mathbb{R}$

b) $f(x) = x^3 + 2$ et $I = \mathbb{R}$

c) $f(x) = \sqrt{x-4}$ et $I =]4; +\infty[$

d) $f(x) = x^2 + 3$ et $I = \mathbb{R}$

e) $f(x) = x^2 + 3x + 1$ et $I = \mathbb{R}$

f) $f(x) = \sqrt{3x+9}$ et $I =]-3; +\infty[$

g) $f(x) = \frac{x}{x-2}$ et $I =]2; +\infty[$

h) $f(x) = x + 2 + \sqrt{x}$ et $I =]0; +\infty[$

4.2 Tableau des dérivée usuelles

Tableau des dérivée usuelles

La fonction f	Dérivable sur :	La fonction dérivée f'
$f(x) = a\,;\ (a \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = ax + b\,;\ (a, b \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = a$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^3$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 3x^2$
$f(x) = x^n\,;\ (n \in \mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = \frac{-1}{x^2}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$\mathbb{R}^{*+}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

4.3 Opérations sur les fonctions dérivables

Propriété :

Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I, $(n \in \mathbb{N}^*)$ et $(a \in \mathbb{R})$.

On a alors :

a) $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$;

b) $(\alpha f)'(x) = \alpha f'(x)$;

c) $(f(x) \times g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

d) $\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{g(x)^2}$; avec g ne s'annule pas sur I

e) $(f^n(x))' = nf'(x) \cdot f(x)^{n-1}$

f) $(\sqrt{f(x)})' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$; avec $\forall x \in I\,;\ f(x) > 0$

e) $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g(x)^2}$; avec g ne s'annule pas sur I .

- Tout fonction polynomiale est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- Tout fonction rationnelle est dérivable sur son ensemble de définition.

Exemple

Dans chacun des cas suivants, justifier la dérivabilité de la fonction f sur I , et calculer f' :

a) $f(x) = x^3 + 3x^2 - x + 10$; et $I = \mathbb{R}$

b) $f(x) = \frac{1}{x^2+2}$; et $I = \mathbb{R}$

c) $f(x) = \sqrt{x} + 3x$; et $I =]0; +\infty[$

d) $f(x) = \sqrt{2x-4}$; et $I =]2; +\infty[$

e) $f(x) = (x^2+2)^5$; et $I = \mathbb{R}$

f) $f(x) = -x^5 - 3x^4 + 3x^2 + 1$; et $I = \mathbb{R}$

g) $f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{x}$; et $I =]0; +\infty[$

♠ Solution

1. $f(x) = x^3 + 3x^2 - x + 10$ et $I = \mathbb{R}$.

   La fonction f est polynomiale , donc dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus on a $(\forall x \in \mathbb{R})$:

   $f'(x) = (x^3 + 3x^2 - x + 10)' = (x^3)' + 3(x^2)' - x' + 10' = 3x^2 + 3 \times 2x - 1 + 0 = 3x^2 + 6x - 1$ (d'après le tableau des fonction usuelles) Ainsi : $(\forall x \in \mathbb{R})\,;\ f'(x) = 3x^2 + 6x - 1$.

2. $f(x) = \frac{1}{x^2+2}$ et $I = \mathbb{R}$.

   On a $(\forall x \in \mathbb{R})$: $x^2 + 2 \neq 0$ donc f est bien définie sur $\mathbb{R}$, Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$, on a $(\forall x \in \mathbb{R})$:

   $f'(x) = \left(\frac{1}{x^2+2}\right)' = \frac{-(x^2+2)'}{(x^2+2)^2} = \frac{-2x}{(x^2+2)^2}$. Ainsi : $(\forall x \in \mathbb{R})\,;\ f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+2)^2}$.

3. $f(x) = \sqrt{x} + 3x$; et $I =]0;+\infty[$.

   On sait que la fonction $x \longmapsto 3x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $]0;+\infty[$, et la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0;+\infty[$, donc la fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$ en tant que somme de deux fonction dérivable sur $]0;+\infty[$. De plus on a $(\forall x \in]0;+\infty[)$

   $f'(x) = (\sqrt{x} + 3x)' = (\sqrt{x})' + (3x)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 3$, Ainsi $(\forall x \in]0;+\infty[)$; $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 3$

4. $f(x) = \sqrt{2x-4}$; et $I =]2;+\infty[$.

   Le domaine de définition de la fonction f est $\mathcal{D}_f =]2;+\infty[$.

   La fonction $x \longmapsto 2x - 4$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynomiale. Il s'ensuit donc que f est dérivable en tout point de $\mathcal{D}_f$ tel que $2x - 4 > 0$. Par conséquence la fonction f dérivable sur $]2;+\infty[$. De plus, on a $(\forall x \in]2;+\infty[)$

   $f'(x) = (\sqrt{2x-4})' = \frac{(2x-4)'}{2\sqrt{2x-4}} = \frac{2}{2\sqrt{2x-4}} = \frac{1}{\sqrt{2x-4}}$. Par suite $(\forall x \in]2;+\infty[)$: $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-4}}$

5. $f(x) = (x^2+2)^5$; et $I = \mathbb{R}$.

   La fonction f est polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus $(\forall x \in \mathbb{R})$

   $f'(x) = ((x^2+2)^5)' = 5 \times (x^2+2)' \times (x^2+2)^4 = 5(2x+0)(x^2+2)^4 = 10x(x^2+2)^4$. Ainsi $(\forall x \in \mathbb{R})$; $f'(x) = 10x(x^2+2)^4$.

6. $f(x) = -x^5 - 3x^4 + 3x^2 + 1$; et $I = \mathbb{R}$ (*Facile ! voir* a))

7. $f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{x}$; et $I =]0;+\infty[$.

   la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $]0;+\infty[$, et la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ dérivable sur $]0;+\infty[$, donc la fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$ en tant que somme de deux fonction dérivable sur $]0;+\infty[$. De plus on a $(\forall x \in]0;+\infty[)$

   $f'(x) = (\frac{1}{x} + \sqrt{x})' = (\frac{1}{x})' + (\sqrt{x})' = \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Ainsi $(\forall x \in]0;+\infty[)$; $f'(x) = \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

♠ Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction f , et calculer f' dans les cas suivants : à faire !

a) $f(x) = -2x^6 + 4x^4 - x^3 + x$;
b) $f(x) = \frac{1}{(x-3)^2}$;
c) $f(x) = \frac{7x-1}{2x+1}$;
d) $f(x) = \frac{3}{x}\sqrt{2x+1}$;
e) $f(x) = (3-x^3)^3$;
f) $f(x) = \frac{x\sqrt{x^2+1}}{x^2+2}$;
g) $f(x) = \sqrt{x^2+x+1}$;
h) $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$;
i) $f(x) = \sqrt{x^2-x}$;

Proposition

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I , a et b deuc nombres réels avec $a \neq 0$.

Soit J l'ensemble des réels x tels que $(ax+b) \in I$. Alors : La fonction f définie par : $f(x) = u(ax+b)$ est dérivable sur J et de plus : $(\forall x \in J)$, $f'(x) = au'(ax+b)$

4.4 La dérivée seconde

Définition :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

Si la fonction dérivée f' est dérivable sur I , alors elle est admet une fonction dérivée définie sur I qui s'appelle la fonction dérivée seconde de f et qu'on note f" , On dit qur f est dérivable deux fois sur I.

Exemple :

On considère la fonction f définie par : $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$.

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = (x^3 - 2x^2 + x)' = 3x^2 - 4x + 1$ et $f"(x) = (3x^2 - 4x + 1)' = 6x - 4$

Calculer la dérivée seconde des fonctions suivantes : à faire !

a) $f(x) = x^3 + 3x^2 - x + 10$; b) $f(x) = \frac{1}{x^2+2}$; c) $f(x) = \sqrt{x} + 3x$;

5 Application de la dérivation

5.1 Monotonie d'une fonction numérique

Proposition :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- Si l fonction f est constante sur I, si et seulement si : $(\forall x \in I)\,;\ f'(x) = 0$
- Si l fonction f est croissante sur I, si et seulement si : $(\forall x \in I)\,;\ f'(x) \geq 0$
- Si l fonction f est décroissante sur I, si et seulement si : $(\forall x \in I)\,;\ f'(x) \leq 0$

Exemple :

On considère la fonction f définie par : $f(x) = 3x^2 - 6x$. étudions la monotonie de f .

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car polynomiale . De plus on a $(\forall x \in \mathbb{R})$: $f'(x) = (3x^2-6x)' = 6x-6 = 6(x-1)$

. étudions maintenant le signe de $f'(x)$.

comme $6 > 0$, alors le signe de $f'(x)$ est celui de $(x-1)$.

On a $(\forall x \in \mathbb{R})$: $x - 1 \geq 0 \iff x \geq 1 \iff x \in [1;+\infty[$. donc $\forall x \in [1;+\infty[\,;\ f'(x) \geq 0$

et $x - 1 \leq 0 \iff x \leq 1 \iff x \in]-\infty;1]$. donc $\forall x \in]-\infty;1]\,;\ f'(x) \leq 0$

Par conséquent : • La fonction f est croissante sur $[1;+\infty[$; • La fonction f est décroissante sur $]-\infty;1]$;

Remarque :

♣ La fonction dérivée est un outil puissant pour étudier la monotonie d'une fonction numérique .

♣ Pour étudier la monotonie d'une fonction f dérivable sur un intervalle , on calcule la fonction dérivée f' puis on détermine son signe et on utilise la proposition précédente.

Application :

En utilisant la fonction dérivée, étudier les variations de la fonction f dans chacun des cas suivants :

a) $f(x) = x^2 - 4x + 1$; b) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$; c) $f(x) = \frac{1}{2x+1}$;

d) $f(x) = \frac{x^3}{x-2}$; e) $f(x) = (3 - x^3)^3$; f) $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$;

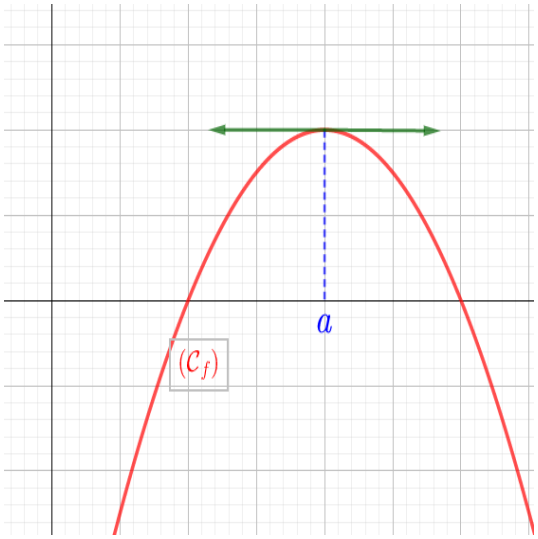
g) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$; h) $f(x) = \frac{x^2+x}{x^2+x+1}$; i) $f(x) = x\sqrt{x}$;

5.2 Extrema d'une fonction dérivable sur un intervalle

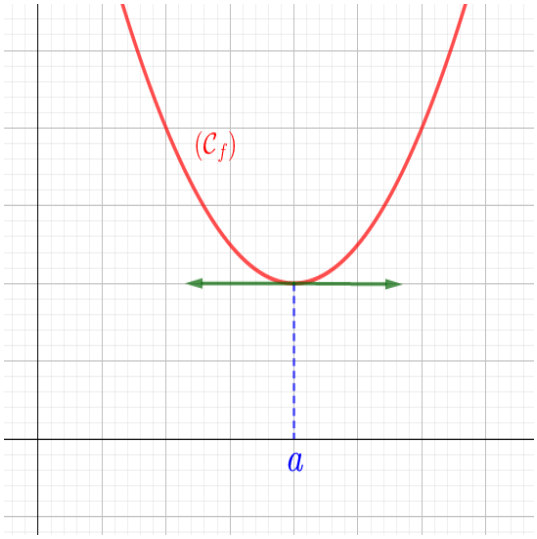
Proposition :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et a un élément de I .

Si f admet un extremum local au point a, alors : $f'(a) = 0$

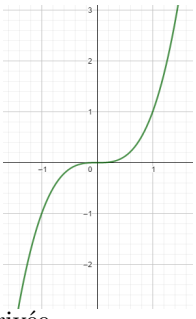


f présente un maximum en a



f présente un minimum en a

Remarque :



♣ La réciproque de la proposition précédente est évidemment fausse comme le montre l'exemple classique $f(x) = x^3$ sur $\mathbb{R}$. Pour cet exemple, on a $f'(0) = 0$ mais f ne présente pas un extremum en 0 .

la condition $f'(a) = 0$ est donc nécessaire mias pas suffisante pour que la fonction f présente un extremum en un point a d'un intervalle I.

♣ Les extremums locaux d'une fonction sont à chercher parmi les zéros de la fonction dérivée.

Si f admet un extremum local au point a , alors la tangente à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point $A(a; f(a))$ est horizontale.

Proposition :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et a un élément de I .

Si f s'annule en a en changeant de signe, alors f admet un extremum en a.

Exemple :

1. Considérons la fonction f définie par : $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

   On a $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ car f est une fonction polynomiale, alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on :$f'(x) = (x^2-4x+3)' = 2x - 4 = 2(x - 2)$, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $(x - 2)$, le tableau de signe de f' est le suivant :

   Alors d'après le tableau f' s'annule en 2 en changeant le signe, d'où f admet un minimum en 2 qui est : $f(2) = 3$.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

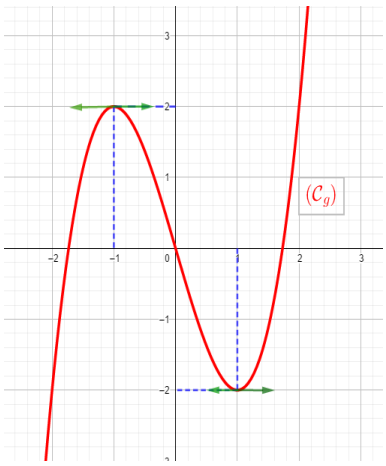
2. Considérons la fonction g définie par : $f(x) = x^3 - 3x$.

   On a $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}$ car g est une fonction polynomiale, alors g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on :$g'(x) = (x^3 - 3x)' = 3x^2 - 3$, étudions le signe de g' :

   $g'(x) = 0 \Longleftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Longleftrightarrow x = 1$ ou $x = -1$ donc g' s'annule en 1 et -1 en changeant le signe , voila le tableau de variation de g :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	$g(-1) = 2$	↘	$g(1) = -2$	↗	$+\infty$

d'où la fonction g admet deux extremums locaux sur $\mathbb{R}$; un minimum local en 1 et qui est $g(1) = 2$, et un maximum local en -1 qui est $g(-1) = 2$



Fin de Cours

6 Techniques et astuces

Nombre dérivé - Tangente à une courbe

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 4\sqrt{x} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 + 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction f est dérivable au point $a = 1$ en déterminant le nombre dérivé $f'(1)$.
2. Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ de f au point d'abscisse 1 .

Solution

1. Montrons que la fonction f est dérivable au point $a = 1$.

   • Dérivabilité à droite en 1, on a : $\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2+3-4}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} x + 1 = 2$.

   Par conséquence, la fonction f est dérivable à droite en 1 et $f'_d(1) = 2$.

   • Dérivabilité à gauche en 1, on a : $\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{4\sqrt{x}-4}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{4(\sqrt{x}-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{4(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{4(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{4(\sqrt{x^2}-1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{4(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{4}{\sqrt{x}+1} = \frac{4}{\sqrt{1}+1} = 2$.

Par conséquence, la fonction f est dérivable à gauche en 1 et $f'_g(1) = 2$.

• puisque $f'_d(1) = f'_g(1) = 2$, alors f est dérivable en 1 et $f'(1) = 2$

2. L'équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ de f au point d'abscisse 1 est : $y = f'(1)(x-1) + f(1)$ avec $f'(1) = 2$ et $f(1) = 4$ par suite : $(T) : y = 2x + 2$

▸ Pour montrer qu'une fonction est dérivable en un point a, on peut :

■ Appliquer la définition et montrer que : $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \ell \in \mathbb{R}$

■ Montrer que f est dérivable à gauche et à droite et que $f'_d(a) = f'_g(a)$.

■ Utiliser les opérations sur les fonctions dérivables.

▸ Dans le cas où : $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \pm\infty$, f n'est pas dérivable en a et sa courbe représentative admet une tangente parallèle à l'axe des ordonnées au point $M(a; f(a))$

Fonction dérivée - Variation

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2x - 3$.
   (a) Calculer $g'(x)$, pour tout x dans $\mathbb{R}$.
   (b) Étudier les variations de g et dresser son tableau de variation.
   (c) Calculer $g(1)$ et en déduire le signe de $g(x)$.
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^4 - x^3 + x^2 - 3x - 6$.
   (a) Montrer que $f'(x) = g(x)$, pour tout x dans $\mathbb{R}$.
   (b) En déduire le tableau de variation de f.
   (c) Déterminer le nombre de solution de l'équation $f(x) = 0$.
   (d) Calculer $f(-1)$ et $f(2)$, en déduire le signe de $f(x)$.

Solution

1. (a) Calculons $g'(x)$, pour tout x dans $\mathbb{R}$.

On a g est fonction polynôme de degré 3 donc est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $(\forall x \in \mathbb{R}) : g'(x) = 12x^2 - 6x + 2$.

(b) Les variation de g , alors étudions le signe de g' :

on a $g'(x) = 12x^2 - 6x + 2$, le discriminent du trinôme $12x^2 - 6x + 2$ est $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 12 \times 2 = -60 < 0$, donc le trinôme $12x^2 - 6x + 2$ est de signe de 12 qui est positive , alors $(\forall x \in \mathbb{R})$, $g'(x) > 0$ d'où g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Calculons maintenant les limites en $+\infty$ et $-\infty$ pour dresser le tableau de variations :

• $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} 4x^3 - 3x^2 + 2x - 3 = \lim_{x\to+\infty} 4x^3 = +\infty$

• $\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} 4x^3 - 3x^2 + 2x - 3 = \lim_{x\to-\infty} 4x^3 = -\infty$ (car 3 est impair).

Le tableau de variation de la fonction g (ci-contre).

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

(c) $g(1) = 4 - 3 + 2 - 3 = 0$, on a g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ alors :

• si $x \leq 1$ on a $g(x) \leq g(1) \Rightarrow g(x) \leq 0$, donc $\forall x \in]-\infty; 1]$; $g(x) \leq 0$.

• si $x \geq 1$ on a $g(x) \geq g(1) \Rightarrow g(x) \geq 0$, donc $\forall x \in [1; +\infty[$; $g(x) \geq 0$.

finalement : g est positive sur $[1; +\infty[$ et négative sur $]-\infty; 1]$ et $g(1) = 0$

2. (a) Calculons $f'(x)$.

On a f est fonction polynôme de degré 4 donc est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $(\forall x \in \mathbb{R})$: $f'(x) = (x^4 - x^3 + x^2 - 3x - 6)' = 4x^3 - 3x^2 + 2x - 3 = g(x)$.

(b) Déduirons les variations de f.

On a $(\forall x \in \mathbb{R})$: $f'(x) = g(x)$ donc le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$, d'après question 1)c) g est positive sur $[1;+\infty[$ et négative sur $]-\infty;1]$ et $g(1) = 0$, alors :

- $f'(x)$ est positive sur $[1;+\infty[$ donc f est croissante sur $[1;+\infty[$.
- $f'(x)$ est négative sur $]-\infty;1]$ donc f est décroissante sur $]-\infty;1]$.

Calculons maintenant les limites en $+\infty$ et $-\infty$ pour dresser le tableau de variations :

- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^4 - x^3 + x^2 - 3x - 6 = \lim_{x\to+\infty} x^4 = +\infty$
- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^4 - x^3 + x^2 - 3x - 6 = \lim_{x\to-\infty} x^4 = +\infty$ (car 4 est pair).

alors le tableau de variation devient :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(1) = -8$	↗	$+\infty$

(c) Déterminons le nombre de solution de l'équation $f(x) = 0$.

D'après le tableau de variations de f : on a , $f(]-\infty;1]) = [-8;+\infty[$ alors chaque nombre dans $[-8;+\infty[$ a un antécédent dans $]-\infty;1]$ par la fonction f , et puisque $0 \in [-8;+\infty[$ donc $\exists c_1 \in]-\infty;1]$ tel que $f(c_1) = 0$, de même on a $f([1;+\infty[) = [-8;+\infty[$ et puisque $0 \in [-8;+\infty[$ donc $\exists c_2 \in [1;+\infty[$ tel que $f(c_2) = 0$, d'où finalement le nombre de solution de l'équation $f(x) = 0$ est deux .

(d) $f(-1) = (-1)^4 - (-1)^3 + (-1)^2 - 3\cdot(-1) - 6 = 0$ et $f(2) = 2^4 - 2^3 + 2^2 - 3\cdot 2 - 6 = 0$. Le signe de f : d'après question précédente on a $c_1 = -1 \in]-\infty;1]$ et $c_2 = 2 \in [1;+\infty[$.

- commençons par l'intervalle $]-\infty;1]$: f est décroissante sur $]-\infty;1]$ alors si $x \le -1 \Longrightarrow f(x) \ge f(-1) = 0$ alors $(\forall x \in]-\infty;-1])$ $f(x) \ge 0$. et si $x \ge -1 \Longrightarrow f(x) \le f(-1) = 0$ alors $(\forall x \in [-1;1])$ $f(x) \le 0$.
- d'autre par dans l'intervalle $[1;+\infty[$, f est croissante sur cette intervalle alors si $1 \le x \le 2 \Longrightarrow f(x) \le f(2) = 0$ alors $(\forall x \in [1;2])$ $f(x) \le 0$. et si $x \ge 2 \Longrightarrow f(x) \ge f(2) = 0$ alors $(\forall x \in [2;+\infty[)$ $f(x) \ge 0$. donc comme résumé ; sur les intervalles $]-\infty;-1]$ et $[2;+\infty[$, $f(x)$ est positive , et sur l'intervalle $[-1;1]$, $f(x)$ est négative .

Fonction dérivée - Variation et Extremums

Étudier les variations de chacune des fonctions suivantes puis déterminer ses extremums (s'ils existent) :

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ b) $g(x) = \frac{x^3}{2x-4}$

Solution

1. **Pour la fonction** f : on a f est fonction polynôme donc est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $(\forall x \in \mathbb{R})$: $f'(x) = (x^3 - 3x^2 + 3x)' = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x-1)^2$. puisque $(\forall x \in \mathbb{R})$ $(x-1)^2 \ge 0$ et $3 > 0$ donc $(\forall x \in \mathbb{R})$ $f'(x) \ge 0$ alors f est croissante sur $\mathbb{R}$. (les extremums n'existes pas !).
2. **Pour la fonction** g : on a $\mathcal{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ donc g est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ car c'est une fonction

rationnelle. De plus on a pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$:

$$g'(x) = \left(\frac{x^3}{2x-4}\right)' = \frac{(x^3)'\cdot(2x-4)-x^3\cdot(2x-4)'}{(2x-4)^2} = \frac{3x^2(2x-4)-2x^3}{(2x-4)^2} = \frac{6x^3-12x^2-2x^3}{(2x-4)^2} = \frac{4x^2(x-3)}{(2x-4)^2}$$

puisque $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$: $\frac{4x^2}{(2x-4)^2} \geq 0$, alors le signe de $g'(x)$ est celui de $(x-3)$, alors

si $x \leq 3 \Longrightarrow (x-3) \leq 0 \Longrightarrow g'(x) \leq 0$ alors g est décroissante sur $]-\infty;2] \cup [2;3]$.

et si $x \geq 3 \Longrightarrow (x-3) \geq 0 \Longrightarrow g'(x) \geq 0$ alors g est croissante sur $[3;+\infty[$.

Calculons maintenant la limites aux bornes : en $+\infty$, $-\infty$, 2^+ et 2^-

- $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{2x-4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}x^2 = +\infty$.
- $\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{2x-4} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{2x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2}x^2 = +\infty$.
- $\lim_{x\to2^+} g(x) = \lim_{x\to2^+} \frac{x^3}{2x-4} = +\infty$. (car $2x-4>0$ si $x>2$)
- $\lim_{x\to2^-} g(x) = \lim_{x\to2^-} \frac{x^3}{2x-4} = -\infty$. (car $2x-4<0$ si $x<2$)

Le tableau de variation de g :

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	‖ $-\infty$ / $+\infty$	↘	$g(3)$	↗	$+\infty$

D'après le tableau de variations la fonction g' s'annule en 3 en changeant de signe , ainsi la fonction g admet un minimum local au point 3 qui est : $g(3) = \frac{27}{2}$.

Bon Courage