Prof : BOUYGUIR Taher
Classe : 1BACSHF

La Dérivation

Année scolaire : 2024/2025

Contenue	Remarques

I. La dérivation d'une fonction en un point

1. Le nombre dérivée

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et $a \in I$.

- On dit que la fonction f est dérivable en a, s'il existe un nombre réel l tel que :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$$

- Le réel l est appelé le nombre dérivé de la fonction f en a, il est noté : $f'(a)$. On écrit :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

Exemple :

Étudions la dérivabilité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2$ en $a = 1$

Application :

Etudier la dérivabilité de la fonction f en a puis déterminer le nombre dérivé $f'(a)$ s'il existe dans chacun des cas suivants :

- $f(x) = 2x + 1 \; et \; a = 2$
- $f(x) = x^2 + x \; et \; a = 0$

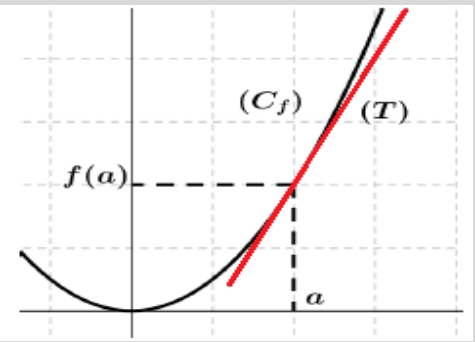
Solution :

2. Interprétation géométrique du nombre dérivé - la droite tangente en un point

Propriété :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et $a \in I$.
Si la fonction f est dérivable au point a alors la courbe de la fonction f admet une tangente au point $A(a; f(a))$ d'équation :

$$(T): y = f'(a)(x - a) + f(a)$$



Exemple :

Déterminons une équation de la tangente (T) à la courbe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2$ au point $A(1; f(1))$

Application :

Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1- $f(x) = 2x + 1 \; et \; a = 2$

2- $f(x) = x^2 + x \; et \; a = 0$

Solution :

La fonction dérivée :

1. La fonction dérivée

Définition :

On dit que la fonction f est dérivable sur un intervalle ouvert I si f est dérivable en tous les points de I et la fonction définie par :

$$f' : \begin{matrix} I \to \mathbb{R} \\ x \to f'(x) \end{matrix}$$

S'appelle la dérivée de la fonction f sur I on le note par f' .

- La Fonction dérivée des fonctions usuelles

La fonction f	D_f	La dérivée f'
$f : x \mapsto a \;\; (a \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$	$f' : x \mapsto 0$
$f : x \mapsto x$	$\mathbb{R}$	$f' : x \mapsto 1$
$f : x \mapsto ax \;\; (a \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$	$f' : x \mapsto a$
$f : x \mapsto ax+b$	$\mathbb{R}$	$f' : x \mapsto a$
$f : x \mapsto x^n \;\; (n \in \mathbb{N}^* - \{1\})$	$\mathbb{R}$	$f' : x \mapsto nx^{n-1}$
$f : x \mapsto \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$f' : x \mapsto -\frac{1}{x^2}$

Exemple :

Déterminons les dérivées des fonctions suivantes :

- $si \; f(x) = 5 \, , alors :$ – – – – – – – – – –
- $si \; f(x) = 2x \, , alors :$ – – – – – – – – –
- $si \; f(x) = x^2 \, , alors :$ – – – – – – – – – –
- $si \; f(x) = 3x + 1, alors:$ – – – – – – – –
- $si \; f(x) = x^3 \, , alors :$ – – – – – – – – –

3- Les opérations sur les fonctions dérivables :

Propriété :

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I et $k \in \mathbb{R}$ alors on a :

- $(f + g)' = f' + g'$
- $(k\, f)' = kf'$
- $(f \times g)' = f'g + g'f$
- $\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}$, tel que : $(\forall x \in I): g(x) \neq 0$
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$, tel que : $(\forall x \in I): g(x) \neq 0$
- $(f^n)' = nf^{n-1} \times f'$, (tel que $n \in \mathbb{N}^*$)

❍ ***Exemple :***

Déterminons les dérivées des fonctions suivantes :

- $f(x) = x^2 + 2x + 1$
- $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$
- $f(x) = x(x+1)$
- $f(x) = (x^2 - 1)^5$
- $f(x) = \frac{1}{x^3+x}$

❍ ***Application :***

Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

- $f_1(x) = 2x^3 + 5x^2 - x + 1$
- $f_2(x) = \frac{x}{2x+2}$
- $f_3(x) = \frac{x^2+3x-4}{x-3}$
- $f_5(x) = (x^3 + x - 4)(x+4)$
- $f_5(x) = (x^2+4)^3$
- $f_6(x) = \frac{1}{x+1}$

❍ ***Solution :***

III- Les variations d'une fonction et le signe de la dérivée :

Propriété :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si f est croissante sur l'intervalle I, alors $(\forall x \in I) : f'(x) \geq 0$
- Si f est décroissante sur l'intervalle I, alors $(\forall x \in I) : f'(x) \leq 0$
- Si f est constante sur l'intervalle I, alors $(\forall x \in I) : f'(x) = 0$
- f admet un extremum au point a si f' s'annule au point a et change le signe.

❍ ***Exemple :***

Étudions la variation de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 + 2x - 1$

❍ ***Remarque :***

Si $f'(a) = 0$ signifie que (C_f) admet une tangente horizontale au point $A(a; f(a))$.

❍ ***Application :***

Soit f la fonction définie par :
$f(x) = x^2 + 2x + 1$

1- Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f

2- Calculer : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

3- Déterminer la fonction dérivée $f'(x)$, puis étudier son signe.

4- Dresser le tableau de variations de la fonction .

5- Déterminer l'extremum de la fonction f.

❍ ***Solution :***