Prof. Taher Bouyguir

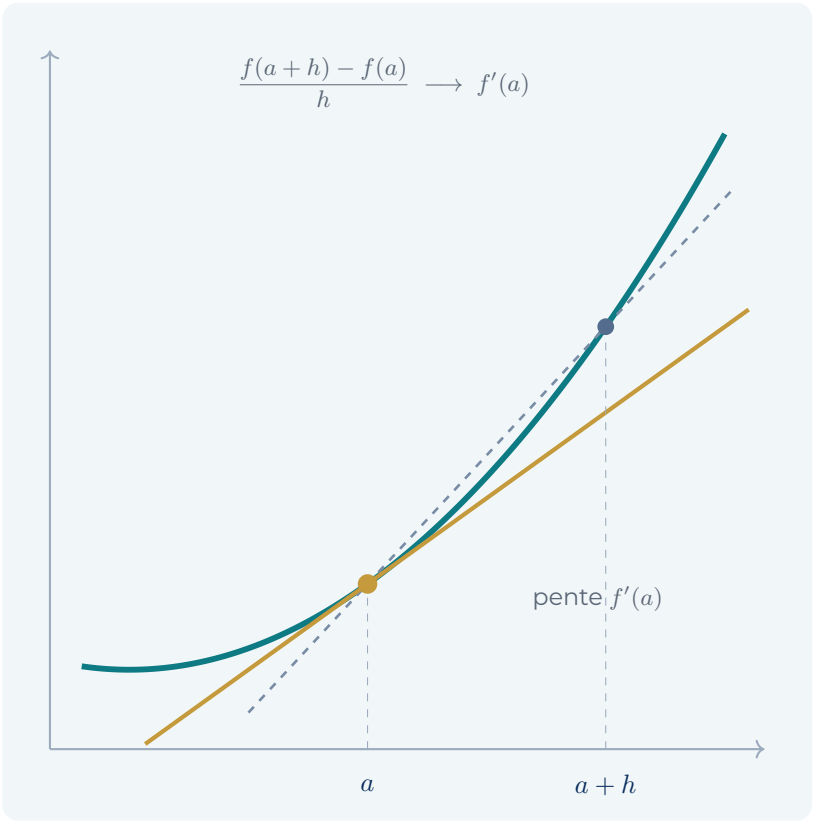
Professeur de mathématiques
Secondaire qualifiant

Prof Taher
Prof Taher Bouyguir
Taher Bouyguir
Contact WhatsApp
Telegram
mr.bouyguir@gmail.com
www.proftaher.com

1ère Spé Maths

CHAPITRE 4

Dérivation



Cours et corrigés des applications

4
Cours

Dérivation

Capacités attendues (en gras : démonstrations à connaître)

- Calculer un taux de variation, la pente d'une sécante.
- Déterminer le nombre dérivé de f en a par le calcul.
- **Démontrer que la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.**
- Lire graphiquement un nombre dérivé.
- Tracer la tangente en un point à la courbe représentative, connaissant le nombre dérivé.
- **Déterminer l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a.**
- Calculer une valeur approchée de $f(a+h)$.
- Connaître la dérivée des fonctions de référence, dont **les fonctions carré et inverse**.
- Déterminer la fonction dérivée d'une somme, d'une différence.
- **Déterminer la fonction dérivée d'un produit de deux fonctions.**
- Déterminer la fonction dérivée de l'inverse d'une fonction, du quotient de deux fonctions.

Prérequis : coefficient directeur d'une droite $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$, équation réduite $y = mx+p$, identités remarquables, calcul avec les fractions et les racines carrées (expression conjuguée), trinôme et discriminant (Chap 3).

Table des matières

I Nombre dérivé d'une fonction en un réel a . . . 3
1 Taux de variation – pente d'une sécante . . . 3
2 Nombre dérivé . . . 4
3 Des fonctions qui ne sont pas dérivables . . . 6
II Tangente à une courbe en un point . . . 7
1 Définition . . . 7
2 Lire graphiquement un nombre dérivé . . . 8
3 Tracer une tangente connaissant le nombre dérivé . . . 10
4 Équation réduite de la tangente . . . 10
5 Valeur approchée de $f(a+h)$: approximation affine . . . 11
III Fonctions dérivées . . . 12
1 Fonction dérivée sur un intervalle . . . 12
2 Dérivées des fonctions de référence . . . 13
IV Opérations sur les fonctions dérivées . . . 14
1 Les formules . . . 14
2 Somme, différence, produit par un réel . . . 16
3 Produit de deux fonctions . . . 16
4 Inverse et quotient . . . 17
5 Dérivée de $x \mapsto g(ax+b)$ . . . 19
6 Tableau récapitulatif . . . 20
V Exemples à traiter . . . 20
Corrigés des applications . . . 22

I Nombre dérivé d'une fonction en un réel a

1 Taux de variation – pente d'une sécante

Définition 1 : taux de variation

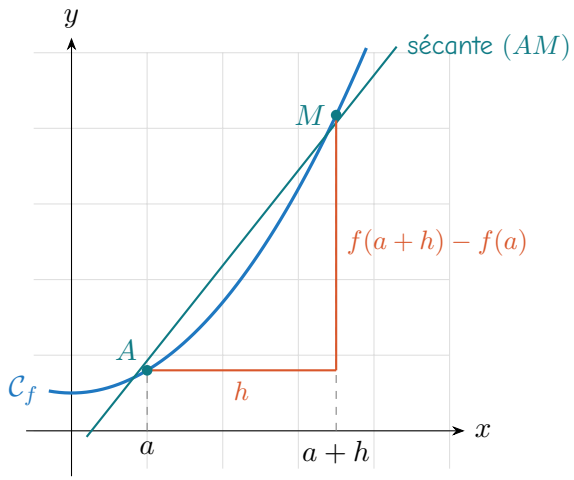
Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$; a et $a+h$ sont deux réels de I, avec $h \neq 0$.
On appelle **taux de variation** de f entre a et $a+h$ le nombre :

$$t(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

$t(0)$ n'existe pas : on s'intéresse à ce que devient ce rapport lorsque h se rapproche de 0.

Propriété 1 : interprétation graphique

Soit $A\big(a\,;f(a)\big)$ et $M\big(a+h\,;f(a+h)\big)$ deux points de la courbe $\mathcal{C}_f$.
Le taux de variation $t(h)$ est le **coefficient directeur** de la droite (AM), appelée **sécante** à $\mathcal{C}_f$.



Exemple

Soit $f(x) = x^2$. Le taux de variation de f entre 1 et 3 (donc $a=1$, $h=2$) est :

$$\frac{f(3)-f(1)}{3-1} = \frac{9-1}{2} = 4.$$

La sécante passant par les points $A(1\,;1)$ et $M(3\,;9)$ de la parabole a pour coefficient directeur 4.

Application 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x$.

1 Calculer le taux de variation de f entre 1 et 4.

2 Calculer le taux de variation de f entre -1 et 2.

3 Interpréter graphiquement ces deux résultats.

Ma réponse :

2 Nombre dérivé

Définition 2 : nombre dérivé

Si le taux de variation $t(h)$ tend vers un **nombre réel** lorsque h tend vers 0, on dit que f est **dérivable en** a.
Ce nombre réel est appelé **nombre dérivé de** f **en** a et se note $f'(a)$:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Méthode : calculer un nombre dérivé par la définition

1 Calculer $f(a)$, puis développer et réduire $f(a+h)$.

2 Simplifier la différence $f(a+h) - f(a)$: on doit pouvoir mettre h en facteur.

3 Écrire le taux $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ et le simplifier par h (avec $h \neq 0$).

4 Chercher la limite du taux lorsque h tend vers 0 : si c'est un réel, c'est $f'(a)$.

Exemple : un trinôme en $a = 2$

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x - 3$ et $a = 2$. On a $f(2) = 4 + 4 - 3 = 5$. Pour $h \neq 0$:

$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{(2+h)^2 + 2(2+h) - 3 - 5}{h} = \frac{4 + 4h + h^2 + 4 + 2h - 8}{h}$$
$$= \frac{6h + h^2}{h} = \frac{h(6+h)}{h} = 6 + h.$$

Donc $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim\limits_{h \to 0}(6 + h) = 6$: f est dérivable en 2 et $f'(2) = 6$.

Exemple : fonction inverse en $a = 2$

Soit $f(x) = \dfrac{1}{x}$ et $h \neq 0$ (avec $2 + h \neq 0$) :

$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{\frac{1}{2+h} - \frac{1}{2}}{h} = \frac{\frac{2-(2+h)}{2(2+h)}}{h} = \frac{-h}{2h(2+h)} = \frac{-1}{2(2+h)}.$$

Lorsque h tend vers 0, ce taux tend vers $-\dfrac{1}{4}$. Donc $f'(2) = -\dfrac{1}{4}$.

Application 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3x + 1$.
Montrer, à l'aide d'un taux de variation, que f est dérivable en 2 et que $f'(2) = 1$.

Ma réponse :

Application 3

Soit f la fonction racine carrée : $f(x) = \sqrt{x}$ sur $[0\,;+\infty[$.
Montrer que f est dérivable en 4 et calculer $f'(4)$. *(Indication : multiplier par l'expression conjuguée.)*

Ma réponse :

3 Des fonctions qui ne sont pas dérivables

Exemple : valeur absolue en 0

Soit g la fonction valeur absolue définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = |x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$ et $a = 0$.

$$\frac{g(0+h)-g(0)}{h} = \frac{|h|-|0|}{h} = \frac{|h|}{h} = \begin{cases} \dfrac{h}{h} = 1 & \text{pour } h > 0 \\ \dfrac{-h}{h} = -1 & \text{pour } h < 0 \end{cases}$$

Selon que h s'approche de 0 par la droite ou par la gauche, le taux vaut 1 ou -1 : il ne tend pas vers **un unique** nombre réel. Donc g **n'est pas dérivable en** 0.

Propriété 2

La fonction racine carrée $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie en 0 mais **n'est pas dérivable en** 0.

Démonstration

Pour $h > 0$:

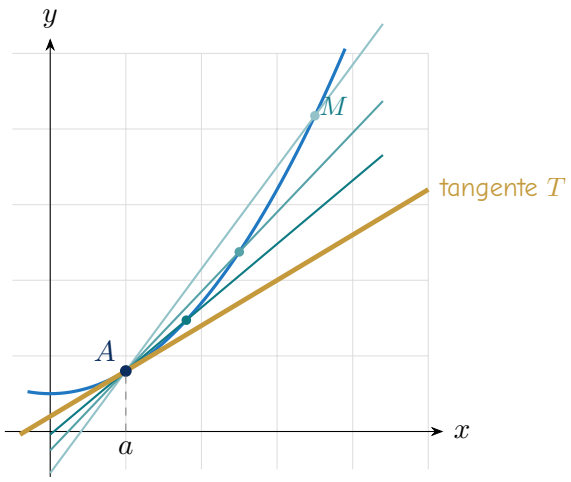
$$\frac{\sqrt{0+h}-\sqrt{0}}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{h}\times\sqrt{h}} = \frac{1}{\sqrt{h}}.$$

Lorsque h tend vers 0 (avec $h > 0$), $\sqrt{h}$ tend vers 0 et $\dfrac{1}{\sqrt{h}}$ prend des valeurs de plus en plus grandes : il tend vers $+\infty$.
Le taux de variation ne tend pas vers un nombre réel, donc la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0. □

II Tangente à une courbe en un point

1 Définition

Soit $A\big(a\,;f(a)\big)$ et $M\big(a+h\,;f(a+h)\big)$ deux points de $\mathcal{C}_f$. Lorsque h tend vers 0, le point M se rapproche de A sur la courbe, et la sécante (AM) « pivote » autour de A vers une droite limite : la **tangente** à $\mathcal{C}_f$ en A. Dire que $t(h)$ tend vers $f'(a)$ revient à dire que le coefficient directeur de (AM) tend vers $f'(a)$.



Définition 3 : tangente

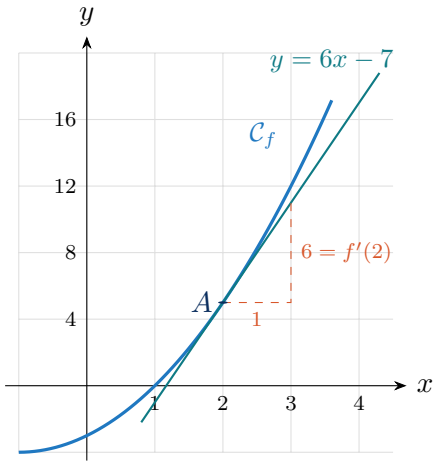
Si f est dérivable en a, on appelle **tangente à $\mathcal{C}_f$ au point $A\big(a\,;f(a)\big)$** la droite qui passe par A et qui a pour **coefficient directeur le nombre dérivé** $f'(a)$.

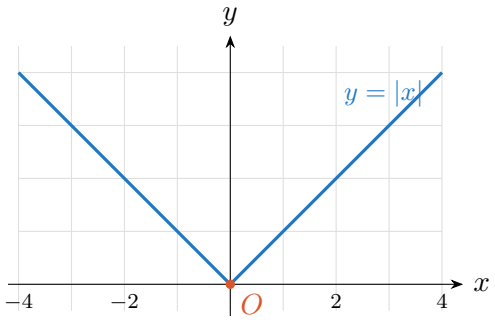
Remarque

- Le nombre dérivé $f'(a)$ est donc la **pente de la tangente** à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a : la tangente étant tracée, la lecture graphique de son coefficient directeur donne $f'(a)$.
- Si $f'(a) = 0$, la tangente est **horizontale** (parallèle à l'axe des abscisses).

Exemple

1) Pour $f(x) = x^2 + 2x - 3$, on a vu que $f'(2) = 6$ et $f(2) = 5$. La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point $A(2\,;5)$ est la droite passant par A de coefficient directeur 6 : en avançant de 1, on monte de 6.
2) La fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0 : sa courbe forme un « coin » (point anguleux) en O et **n'admet pas de tangente** en ce point.





Remarque

Graphiquement, la courbe de la fonction racine carrée admet au point $O(0\,;0)$ une tangente **verticale** (l'axe des ordonnées) : son « coefficient directeur » n'existe pas, ce qui traduit la non-dérivabilité en 0.

2 Lire graphiquement un nombre dérivé

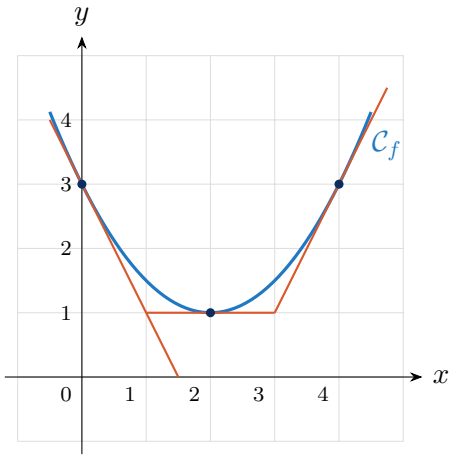
Méthode : lecture graphique de $f'(a)$

1. Repérer la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a.
2. Lire les coordonnées de deux points de cette tangente (des nœuds du quadrillage si possible).
3. Calculer son coefficient directeur $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$: c'est $f'(a)$.

Astuce : en avançant de 1 unité vers la droite sur la tangente, on monte (ou on descend) de $f'(a)$ unités.

Exemple

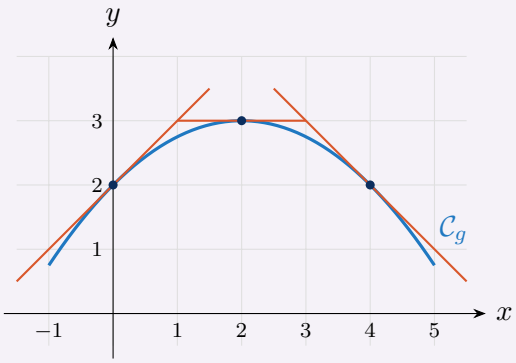
On a tracé ci-dessous la courbe $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f et ses tangentes aux points d'abscisses 0, 2 et 4.



- La tangente en $A(0\,;3)$ passe par $(0\,;3)$ et $(1\,;1)$: $f'(0) = \dfrac{1-3}{1-0} = -2$.
- La tangente en $B(2\,;1)$ est horizontale : $f'(2) = 0$.
- La tangente en $C(4\,;3)$ passe par $(3\,;1)$ et $(4\,;3)$: $f'(4) = \dfrac{3-1}{4-3} = 2$.

Application 4

On a tracé ci-dessous la courbe $\mathcal{C}_g$ d'une fonction g et ses tangentes aux points d'abscisses 0, 2 et 4.



Lire graphiquement $g(0)$, $g'(0)$, $g(2)$, $g'(2)$, $g(4)$ et $g'(4)$. Justifier.

Ma réponse :

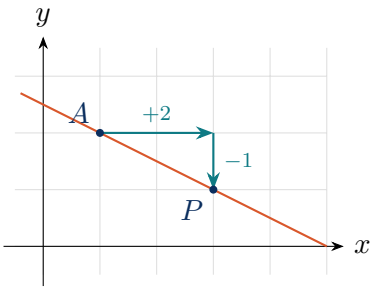
3 Tracer une tangente connaissant le nombre dérivé

Méthode : tracer la tangente en $A(a\,;f(a))$

1. Placer le point $A(a\,;f(a))$.
2. À partir de A, avancer de 1 unité vers la droite, puis monter de $f'(a)$ unités (descendre si $f'(a)<0$) : on obtient un second point $P(a+1\,;f(a)+f'(a))$.
3. Tracer la droite (AP) : c'est la tangente.

Exemple

On sait que $f(1)=2$ et $f'(1)=-\dfrac{1}{2}$. On place $A(1\,;2)$, puis on avance de 2 et on descend de 1 (car $-\dfrac{1}{2}=\dfrac{-1}{2}$) : on obtient $P(3\,;1)$. La tangente est la droite (AP).



4 Équation réduite de la tangente

Propriété 3

Soit f une fonction dérivable en a. La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a a pour équation réduite :

$$\boxed{y=f'(a)(x-a)+f(a)}$$

Démonstration

La tangente a pour coefficient directeur $f'(a)$, donc une équation de la forme $y=f'(a)\,x+b$, où b est un réel.
Elle passe par $A(a\,;f(a))$, donc les coordonnées de A vérifient cette équation :

$$f(a)=f'(a)\times a+b \quad \text{soit} \quad b=f(a)-f'(a)\times a.$$

Ainsi $y=f'(a)\,x+f(a)-f'(a)\,a$ et, en factorisant par $f'(a)$: $y=f'(a)(x-a)+f(a)$. □

Exemple

Pour $f(x) = x^2 + 2x - 3$, on a $f(2) = 5$ et $f'(2) = 6$. La tangente au point d'abscisse 2 a pour équation $y = 6(x-2) + 5$, soit $y = 6x - 7$ (c'est la droite tracée plus haut).

Application 5

1. Soit $f(x) = \dfrac{1}{x}$. On rappelle que $f'(2) = -\dfrac{1}{4}$. Déterminer l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 2.
2. Soit $g(x) = x^2$. On admet que $g'(-1) = -2$. Déterminer l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse -1.

Ma réponse :

5 Valeur approchée de $f(a+h)$: approximation affine

Propriété 4 : approximation affine

Si f est dérivable en a, alors pour h **proche de** 0 :

$$f(a+h) \approx f(a) + h\,f'(a).$$

Remarque

Graphiquement, près du point A, la courbe $\mathcal{C}_f$ et sa tangente sont presque confondues : on remplace l'ordonnée du point de la courbe par celle du point de la tangente.

Exemple

Soit $f(x) = \sqrt{x}$. On a $f(4) = 2$ et $f'(4) = \dfrac{1}{4}$ (voir l'application 3). Avec $a = 4$ et $h = 0{,}02$:

$$\sqrt{4{,}02} = f(4 + 0{,}02) \approx 2 + 0{,}02 \times \frac{1}{4} = 2{,}005.$$

La calculatrice donne $\sqrt{4{,}02} \approx 2{,}004\,994$: l'approximation est excellente.

Application 6

En utilisant les résultats déjà obtenus dans ce cours, donner une valeur approchée de :

1. $(3{,}01)^2$ (avec $f(x) = x^2$ et $a = 3$, sachant que $f'(3) = 6$) ;
2. $\dfrac{1}{2{,}1}$ (avec $f(x) = \dfrac{1}{x}$ et $a = 2$).

Comparer avec les valeurs données par la calculatrice.

Ma réponse :

III Fonctions dérivées

1 Fonction dérivée sur un intervalle

Définition 4 : fonction dérivée

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On dit que f est **dérivable sur** I si elle est dérivable en tout réel x de I.
Dans ce cas, la fonction qui à tout réel x de I associe le nombre dérivé $f'(x)$ est appelée **fonction dérivée** de f et se note f'.

2 Dérivées des fonctions de référence

Propriété 5 : dérivées usuelles

Fonction	$f(x)$	Dérivable sur	$f'(x)$
constante	k $(k \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$	0
identité	x	$\mathbb{R}$	1
affine	$mx+p$	$\mathbb{R}$	m
carré	x^2	$\mathbb{R}$	$2x$
cube	x^3	$\mathbb{R}$	$3x^2$
puissance (admise)	x^n $(n \in \mathbb{N},\, n \geqslant 2)$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
inverse	$\dfrac{1}{x}$	$]-\infty\,;0[$ et $]0\,;+\infty[$	$-\dfrac{1}{x^2}$
racine carrée	$\sqrt{x}$ (sur $[0\,;+\infty[$)	$]0\,;+\infty[$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Démonstration

Dans chaque cas, a est un réel où la fonction est définie et $h \neq 0$ (tel que $a+h$ soit aussi dans l'ensemble de définition).

- **Constante :** $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \dfrac{k-k}{h} = 0$, donc $f'(a)=0$.
- **Identité :** $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \dfrac{(a+h)-a}{h} = 1$, donc $f'(a)=1$.
- **Carré :** $\dfrac{(a+h)^2-a^2}{h} = \dfrac{2ah+h^2}{h} = \dfrac{h(2a+h)}{h} = 2a+h$, qui tend vers $2a$ lorsque h tend vers 0.
- **Cube :** $\dfrac{(a+h)^3-a^3}{h} = \dfrac{a^3+3a^2h+3ah^2+h^3-a^3}{h} = 3a^2+3ah+h^2$, qui tend vers $3a^2$.
- **Inverse :** pour $a \neq 0$ et $a+h \neq 0$:

$$\frac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h} = \frac{a-(a+h)}{h\,a(a+h)} = \frac{-1}{a(a+h)}, \quad \text{qui tend vers } -\frac{1}{a^2}.$$

- **Racine carrée :** pour $a \geqslant 0$ et $a+h>0$, on multiplie par l'expression conjuguée :

$$t(h) = \frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h} = \frac{(\sqrt{a+h}-\sqrt{a})(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}{h(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})} = \frac{a+h-a}{h(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})} = \frac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}.$$

Si $a=0$: $t(h) = \dfrac{1}{\sqrt{h}}$ tend vers $+\infty$: pas dérivable en 0 (déjà vu).

Si $a>0$: $\sqrt{a+h}+\sqrt{a}$ tend vers $2\sqrt{a}$, donc $t(h)$ tend vers $\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$, qui est un réel.

□

Exemple

- $f(x) = x^5$: $f'(x) = 5x^4$.
- $g(x) = -4x + 7$: $g'(x) = -4$.
- $k(x) = \dfrac{1}{x}$: $k'(3) = -\dfrac{1}{3^2} = -\dfrac{1}{9}$.
- $r(x) = \sqrt{x}$: $r'(9) = \dfrac{1}{2\sqrt{9}} = \dfrac{1}{6}$.

IV Opérations sur les fonctions dérivées

Dans toute cette partie, u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I, et k est un nombre réel.

1 Les formules

Propriété 6

Fonction	Condition	Dérivée
$u+v$		$(u+v)' = u' + v'$
ku	k constante	$(ku)' = k\,u'$
uv		$(uv)' = u'v + uv'$
$\dfrac{1}{v}$	v ne s'annule pas sur I	$\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$
$\dfrac{u}{v}$	v ne s'annule pas sur I	$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

Toutes ces fonctions sont dérivables sur I (sous la condition indiquée).

Démonstration

a et $a+h$ désignent deux réels de I, avec $h \neq 0$.

- **Somme :**

$$\frac{(u+v)(a+h) - (u+v)(a)}{h} = \frac{u(a+h) - u(a)}{h} + \frac{v(a+h) - v(a)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} u'(a) + v'(a).$$

- **Produit par une constante :**

$$\frac{ku(a+h) - ku(a)}{h} = k \times \frac{u(a+h) - u(a)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} k\,u'(a).$$

- **Produit :** on ajoute et on retranche $u(a)\,v(a+h)$:

$$\begin{aligned}\frac{(uv)(a+h) - (uv)(a)}{h} &= \frac{u(a+h)v(a+h) - u(a)v(a+h) + u(a)v(a+h) - u(a)v(a)}{h} \\ &= \frac{u(a+h) - u(a)}{h} \times v(a+h) \;+\; u(a) \times \frac{v(a+h) - v(a)}{h}.\end{aligned}$$

Lorsque h tend vers 0, les deux taux tendent vers $u'(a)$ et $v'(a)$, et on admet que $v(a+h)$ tend vers $v(a)$. La limite vaut donc $u'(a)\,v(a) + u(a)\,v'(a)$. □

À toi !

Essaie de démontrer les deux dernières formules avant de lire la démonstration.

1. **Inverse** : écrire le taux de variation de $\dfrac{1}{v}$ entre a et $a+h$, puis réduire au même dénominateur.
2. **Quotient** : écrire $\dfrac{u}{v} = u \times \dfrac{1}{v}$, puis appliquer la formule du produit et celle de l'inverse.

Ma réponse :

Démonstration

- **Inverse** : comme v ne s'annule pas sur I,

$$\frac{\frac{1}{v(a+h)} - \frac{1}{v(a)}}{h} = \frac{v(a) - v(a+h)}{h\,v(a+h)\,v(a)} = -\frac{v(a+h)-v(a)}{h} \times \frac{1}{v(a+h)\,v(a)}.$$

  Lorsque $h \to 0$: $\dfrac{v(a+h)-v(a)}{h} \to v'(a)$ et $v(a+h) \to v(a)$, donc la limite vaut $-\dfrac{v'(a)}{v(a)^2}$.

- **Quotient** : on écrit $\dfrac{u}{v} = u \times \dfrac{1}{v}$ et on applique la formule du produit puis celle de l'inverse :

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = u' \times \frac{1}{v} + u \times \left(-\frac{v'}{v^2}\right) = \frac{u'v}{v^2} - \frac{uv'}{v^2} = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

□

2 Somme, différence, produit par un réel

Exemple : dérivée d'un polynôme

Soit $f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 2x - 7$ sur $\mathbb{R}$. Par somme et produit par un réel :

$$f'(x) = 3 \times 3x^2 - 5 \times 2x + 2 - 0 = 9x^2 - 10x + 2.$$

Application 7

Déterminer la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes :

1. $f(x) = 4x^3 - 2x^2 + 5x - 1$ sur $\mathbb{R}$;
2. $g(x) = \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{3}{x} + 2$ sur $]0\,;+\infty[$;
3. $k(x) = 5\sqrt{x} - x^2$ sur $]0\,;+\infty[$.

Ma réponse :

3 Produit de deux fonctions

Exemple

Soit $f(x) = (2x+1)\sqrt{x}$ sur $]0\,;+\infty[$. On pose $u(x) = 2x+1$ et $v(x) = \sqrt{x}$: $u'(x) = 2$ et $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

$$f'(x) = 2\sqrt{x} + (2x+1) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x} \times 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} + \frac{2x+1}{2\sqrt{x}} = \frac{4x+2x+1}{2\sqrt{x}} = \frac{6x+1}{2\sqrt{x}}.$$

Application 8

Déterminer la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes :

1. $f(x) = (x^2+1)(3x-2)$ sur $\mathbb{R}$ (sans développer, puis vérifier en développant) ;

2 $g(x) = x\sqrt{x}$ sur $]0\,;+\infty[$.

Ma réponse :

4 Inverse et quotient

Exemple : inverse

Soit $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$ ($x^2+1>0$ ne s'annule pas). Avec $v(x) = x^2+1$, $v'(x) = 2x$:

$$f'(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}.$$

Exemple : quotient

Soit $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+3}$ sur $]-3\,;+\infty[$. Avec $u(x) = 2x-1$, $u'(x) = 2$, $v(x) = x+3$, $v'(x) = 1$:

$$f'(x) = \frac{2(x+3)-(2x-1)\times 1}{(x+3)^2} = \frac{2x+6-2x+1}{(x+3)^2} = \frac{7}{(x+3)^2}.$$

Méthode : ensemble de dérivabilité d'un quotient

On cherche les valeurs qui annulent le dénominateur (équation du premier ou du second degré, discriminant) et on les retire : la fonction est dérivable sur chaque intervalle où le dénominateur ne s'annule pas.

Application 9

Déterminer la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{1}{3x-6}$ sur $]2\,;+\infty[$;
2. $g(x) = \dfrac{1}{x^2+x+1}$ sur $\mathbb{R}$ (justifier que le dénominateur ne s'annule pas).

Ma réponse :

Application 10

Déterminer la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$ sur $]1\,;+\infty[$;
2. $g(x) = \dfrac{3x+2}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$.

Ma réponse :

5 Dérivée de $x \mapsto g(ax+b)$

Propriété 7 : admise

a et b sont deux réels avec $a \neq 0$. Si g est une fonction dérivable sur un intervalle J, alors la fonction f définie sur un intervalle I (tel que pour tout x de I, $ax+b$ appartient à J) par $f(x) = g(ax+b)$ est dérivable sur I et :

$$\boxed{f'(x) = a\,g'(ax+b)}$$

Exemple

- $f(x) = (3x-1)^2$: avec $g(X) = X^2$, $g'(X) = 2X$ et $a = 3$: $f'(x) = 3 \times 2(3x-1) = 6(3x-1)$.
- $k(x) = \sqrt{2x+4}$ sur $]-2\,;+\infty[$: $k'(x) = 2 \times \dfrac{1}{2\sqrt{2x+4}} = \dfrac{1}{\sqrt{2x+4}}$.

Application 11

Déterminer la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes :

1. $f(x) = (2x+5)^3$ sur $\mathbb{R}$;
2. $k(x) = \sqrt{1-3x}$ sur $\left]-\infty\,;\dfrac{1}{3}\right[$;
3. $m(x) = (5-x)^4$ sur $\mathbb{R}$.

Ma réponse :

6 Tableau récapitulatif

À retenir

Opération	Formule	Condition
Somme	$(u+v)' = u' + v'$	
Produit par un réel	$(ku)' = k\,u'$	
Produit	$(uv)' = u'v + uv'$	
Inverse	$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$	v ne s'annule pas sur I
Quotient	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$	v ne s'annule pas sur I
Composée affine	$\big(g(ax+b)\big)' = a\,g'(ax+b)$	

V Exemples à traiter

Application 12

Déterminer l'ensemble de dérivabilité puis calculer la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = 5x^3 \qquad f_2(x) = 3x^2 + 4\sqrt{x} \qquad f_3(x) = \frac{1}{2x^2+5x+3}$$

$$f_4(x) = (3x^2+4x)(5x-1) \qquad f_5(x) = \frac{6x-5}{x^3-2x^2} \qquad f_6(x) = \sqrt{3x-1}$$

Ma réponse :

Application 13

(Synthèse) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

1. Déterminer $f'(x)$.
2. Déterminer l'équation réduite de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 2.
3. Déterminer les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ où la tangente est horizontale.

Ma réponse :

Corrigés des applications

Corrigé de l'application 1

1. $f(1) = 1 - 2 = -1$ et $f(4) = 16 - 8 = 8$, donc $\dfrac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \dfrac{8 - (-1)}{3} = \dfrac{9}{3} = 3$.
2. $f(-1) = 1 + 2 = 3$ et $f(2) = 4 - 4 = 0$, donc $\dfrac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \dfrac{0 - 3}{3} = -1$.
3. La sécante passant par les points de $\mathcal{C}_f$ d'abscisses 1 et 4 a pour coefficient directeur 3 ; celle passant par les points d'abscisses -1 et 2 a pour coefficient directeur -1.

Corrigé de l'application 2

$f(2+h) = (2+h)^2 - 3(2+h) + 1 = 4 + 4h + h^2 - 6 - 3h + 1 = h^2 + h - 1$ et $f(2) = 4 - 6 + 1 = -1$.
Donc $f(2+h) - f(2) = h^2 + h$ et, pour $h \neq 0$: $\dfrac{f(2+h) - f(2)}{h} = \dfrac{h(h+1)}{h} = h + 1$.
Lorsque h tend vers 0, $h + 1$ tend vers 1 : f est dérivable en 2 et $f'(2) = 1$.

Corrigé de l'application 3

Pour $h \neq 0$ et $h > -4$:

$$\frac{\sqrt{4+h} - 2}{h} = \frac{(\sqrt{4+h} - 2)(\sqrt{4+h} + 2)}{h(\sqrt{4+h} + 2)} = \frac{(4+h) - 4}{h(\sqrt{4+h} + 2)} = \frac{1}{\sqrt{4+h} + 2}.$$

Lorsque h tend vers 0, $\sqrt{4+h} + 2$ tend vers 4, donc le taux tend vers $\dfrac{1}{4}$. f est dérivable en 4 et $f'(4) = \dfrac{1}{4}$.

Corrigé de l'application 4

- $g(0) = 2$; la tangente en $(0\,;2)$ passe aussi par $(1\,;3)$: $g'(0) = \dfrac{3 - 2}{1 - 0} = 1$.
- $g(2) = 3$; la tangente en $(2\,;3)$ est horizontale : $g'(2) = 0$.
- $g(4) = 2$; la tangente en $(4\,;2)$ passe aussi par $(3\,;3)$: $g'(4) = \dfrac{2 - 3}{4 - 3} = -1$.

Corrigé de l'application 5

1. $f(2) = \dfrac{1}{2}$ et $f'(2) = -\dfrac{1}{4}$: $y = -\dfrac{1}{4}(x - 2) + \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}$, soit $y = -\dfrac{1}{4}x + 1$.
2. $g(-1) = 1$ et $g'(-1) = -2$: $y = -2\big(x - (-1)\big) + 1 = -2x - 2 + 1$, soit $y = -2x - 1$.

✔ Corrigé de l'application 6

1. $f(3) = 9$, $f'(3) = 6$, $h = 0{,}01$: $(3{,}01)^2 \approx 9 + 0{,}01 \times 6 = 9{,}06$. La calculatrice donne $9{,}0601$.
2. $f(2) = \dfrac{1}{2}$, $f'(2) = -\dfrac{1}{4}$, $h = 0{,}1$: $\dfrac{1}{2{,}1} \approx 0{,}5 + 0{,}1 \times \left(-\dfrac{1}{4}\right) = 0{,}5 - 0{,}025 = 0{,}475$.
   La calculatrice donne $\dfrac{1}{2{,}1} \approx 0{,}476\,19$.

✔ Corrigé de l'application 7

1. $f'(x) = 4 \times 3x^2 - 2 \times 2x + 5 = 12x^2 - 4x + 5$.
2. $g'(x) = \dfrac{5x^4}{5} - 3 \times \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) + 0 = x^4 + \dfrac{3}{x^2}$.
3. $k'(x) = 5 \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - 2x = \dfrac{5}{2\sqrt{x}} - 2x$.

✔ Corrigé de l'application 8

1. $u(x) = x^2 + 1$, $u'(x) = 2x$; $v(x) = 3x - 2$, $v'(x) = 3$:

$$f'(x) = 2x(3x - 2) + 3(x^2 + 1) = 6x^2 - 4x + 3x^2 + 3 = 9x^2 - 4x + 3.$$

   Vérification : $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 3x - 2$, donc $f'(x) = 9x^2 - 4x + 3$. ✓
2. $u(x) = x$, $u'(x) = 1$; $v(x) = \sqrt{x}$, $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$:

$$g'(x) = 1 \times \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2} = \frac{3\sqrt{x}}{2} \qquad \left(\text{car } \frac{x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}\right).$$

✔ Corrigé de l'application 9

1. $v(x) = 3x - 6$ ne s'annule pas sur $]2\,;+\infty[$, $v'(x) = 3$: $f'(x) = -\dfrac{3}{(3x-6)^2}$.
2. Pour $x^2 + x + 1$: $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$, donc ce trinôme ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Avec $v'(x) = 2x + 1$: $g'(x) = -\dfrac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$.

✔ Corrigé de l'application 10

1. $u(x) = x^2 + 1$, $u'(x) = 2x$; $v(x) = x - 1$, $v'(x) = 1$:

$$f'(x) = \frac{2x(x-1) - (x^2+1) \times 1}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - x^2 - 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}.$$

2 $u(x) = 3x + 2$, $u'(x) = 3$; $v(x) = x^2 + 1$, $v'(x) = 2x$:

$$g'(x) = \frac{3(x^2+1) - (3x+2) \times 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{3x^2 + 3 - 6x^2 - 4x}{(x^2+1)^2} = \frac{-3x^2 - 4x + 3}{(x^2+1)^2}.$$

✔ Corrigé de l'application 11

1 $a = 2$, $g(X) = X^3$, $g'(X) = 3X^2$: $f'(x) = 2 \times 3(2x+5)^2 = 6(2x+5)^2$.

2 $a = -3$, $g(X) = \sqrt{X}$, $g'(X) = \dfrac{1}{2\sqrt{X}}$: $k'(x) = -3 \times \dfrac{1}{2\sqrt{1-3x}} = -\dfrac{3}{2\sqrt{1-3x}}$.

3 $a = -1$, $g(X) = X^4$, $g'(X) = 4X^3$: $m'(x) = -1 \times 4(5-x)^3 = -4(5-x)^3$.

✔ Corrigé de l'application 12

- f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ (forme ku avec $u(x) = x^3$) : $f_1'(x) = 5 \times 3x^2 = 15x^2$.
- $x \mapsto 3x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $]0\,;+\infty[$, donc f_2 est dérivable sur $]0\,;+\infty[$: $f_2'(x) = 6x + 4 \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = 6x + \dfrac{2}{\sqrt{x}}$.
- $v(x) = 2x^2 + 5x + 3$: $\Delta = 25 - 24 = 1$, racines $-\dfrac{3}{2}$ et -1. f_3 est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{3}{2}\,;-1\right\}$. Forme $\dfrac{1}{v}$ avec $v'(x) = 4x + 5$: $f_3'(x) = -\dfrac{4x+5}{(2x^2+5x+3)^2}$.
- f_4 est dérivable sur $\mathbb{R}$. Forme uv avec $u = 3x^2 + 4x$, $u' = 6x + 4$, $v = 5x - 1$, $v' = 5$:

$$f_4'(x) = (6x+4)(5x-1) + 5(3x^2+4x) = 30x^2 + 14x - 4 + 15x^2 + 20x = 45x^2 + 34x - 4.$$

- $x^3 - 2x^2 = x^2(x-2) = 0 \iff x = 0$ ou $x = 2$: f_5 est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\,;2\}$. Forme $\dfrac{u}{v}$ avec $u = 6x - 5$, $u' = 6$, $v = x^3 - 2x^2$, $v' = 3x^2 - 4x$:

$$f_5'(x) = \frac{6(x^3-2x^2) - (6x-5)(3x^2-4x)}{(x^3-2x^2)^2} = \frac{6x^3 - 12x^2 - 18x^3 + 39x^2 - 20x}{x^4(x-2)^2}$$
$$= \frac{-12x^3 + 27x^2 - 20x}{x^4(x-2)^2} = \frac{-12x^2 + 27x - 20}{x^3(x-2)^2}.$$

- $f_6(x) = g(3x-1)$ avec $g(X) = \sqrt{X}$, dérivable sur $]0\,;+\infty[$. Or $3x - 1 > 0 \iff x > \dfrac{1}{3}$. Donc f_6 est dérivable sur $\left]\dfrac{1}{3}\,;+\infty\right[$ et, avec $a = 3$: $f_6'(x) = 3 \times \dfrac{1}{2\sqrt{3x-1}} = \dfrac{3}{2\sqrt{3x-1}}$.

✔ Corrigé de l'application 13

1 $f'(x) = 3x^2 - 3$.

2 $f(2) = 8 - 6 + 1 = 3$ et $f'(2) = 3 \times 4 - 3 = 9$. $T : y = 9(x-2) + 3$, soit $y = 9x - 15$.

3 La tangente est horizontale lorsque $f'(x) = 0$, c'est-à-dire $3x^2 - 3 = 0$, soit $x^2 = 1$: $x = -1$ ou $x = 1$.
Comme $f(-1) = 3$ et $f(1) = -1$, les points cherchés sont $(-1\,;3)$ et $(1\,;-1)$.