Dérivation

I- Dérivabilité d'une fonction numérique (Rappels) 1

1) le nombre dérivé ; la dérivée 1

2) Interprétations 1

2.1 Interprétation graphique 1

2.2 Interprétation numérique 3

3) Dérivées des fonctions usuelles 3

3.1 Dérivées des fonctions élémentaires 3

3.2 Règles de dérivation 3

3.3 Signe de la dérivée, sens de variation 4

II- Dérivée de la composée de deux fonctions 4

III. Dérivée de la fonction réciproque 5

I- Dérivabilité d'une fonction numérique (Rappels)

1- le nombre dérivé ; la dérivée

Définitions

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un élément de I.

- On dit que f est dérivable en a s'il existe un réel l tel que : $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=l$.
  Dans ce cas, on appelle l le **nombre dérivé de f en a** et on le note $f'(a)$.
- Si f est dérivable en tout élément de I, on dit que f est dérivable sur I.
- Lorsque la fonction f est dérivable sur I, on note f', **la fonction dérivée** qui à tout x de I associe son nombre dérivée $f'(x)$.

Proposition 1 :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un élément de I.
La fonction f est dérivable en a, si et seulement si, elle est dérivable à droite et à gauche en a et $f'_g(a)=f'_d(a)$.

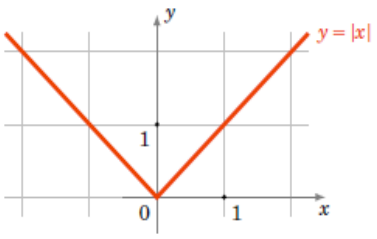
Proposition 2 :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un élément de I.

- Si f est dérivable en a alors f est continue en a.
- Si f est dérivable sur un intervalle I alors f est continue sur I.

Remarque :

- La réciproque de cette proposition est fausse : par exemple, la fonction valeur absolue $x\longmapsto|x|$ est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0.
- Si f est non continue en a alors f n'est pas dérivable en a.



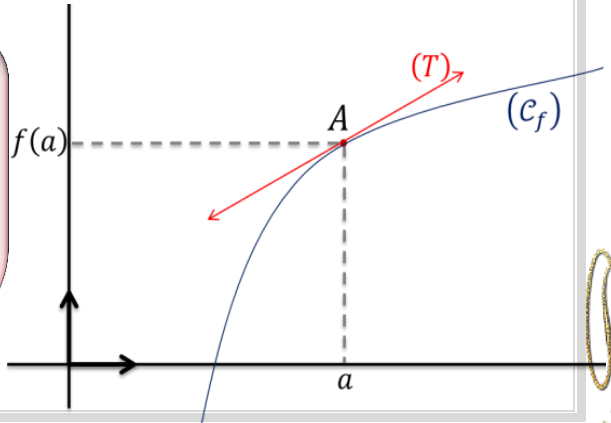
2- Interprétations

2.1- Interprétation graphique

Proposition 3 :

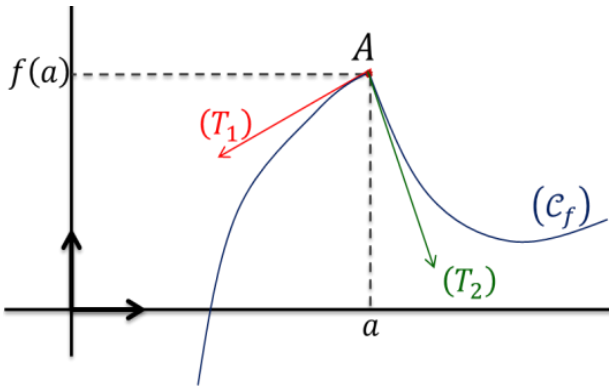
Lorsque f est dérivable en a, la courbe représentative $(\mathcal{C}_f)$ de la fonction f admet au point $A(a;f(a))$ une **tangente** (T) de coefficient directeur $f'(a)$ dont l'équation est :

$$(T):\ y=f'(a).(x-a)+f(a)$$



Proposition 4 :

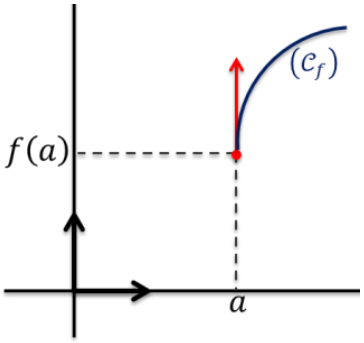
Si f est dérivable à droite en a (respectivement à gauche), alors la courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet une **demi-tangente** à droite (respectivement à gauche) en a.



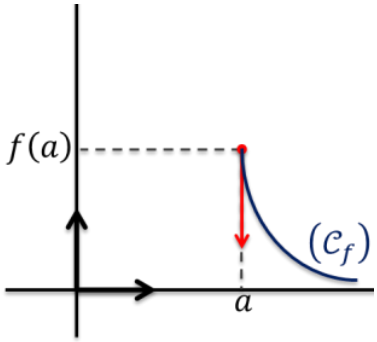
Proposition 5 :

Si f est continue à droite de a et $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \pm\infty$

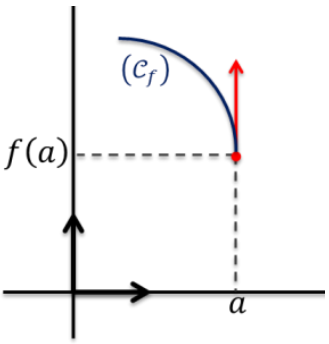
Alors la courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet une **demi-tangente verticale** à droite de a.



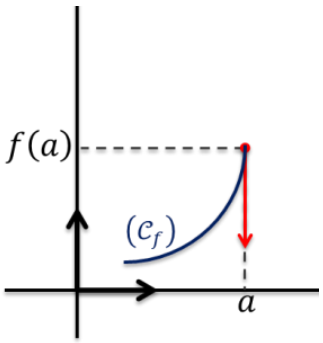
$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$$



$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty$$



$$\lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty$$



$$\lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$$

Application :

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$

① Montrer que l'ensemble de définition de f est : $\mathcal{D}_f =]-\infty; 0] \cup [1; +\infty[$.

② Etudier la dérivabilité de f à gauche en 0 et à droite en 1; puis interpréter graphiquement les résultats obtenus.

2.2- Interprétation numérique

Proposition 6 :

Lorsqu'une fonction f est dérivable en a, une bonne **approximation affine**, lorsque x est voisin de a est :

$$f(x) \approx f'(a).(x-a)+f(a)$$

Exemple :

f est la fonction définie par : $f(x)=\sqrt{x+1}$.

① Calculez $f'(0)$ puis déterminez l'équation de la tangente de $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 0.

② Déterminez une fonction affine g, approximation locale de f au voisinage de 0.

③ Déduisez des valeurs approchées des nombres : $\sqrt{1{,}002}$ et $\sqrt{0{,}999}$

3- Dérivées des fonctions usuelles

3.1- Dérivées des fonctions élémentaires

Voici le tableau des dérivées usuelles ainsi que leurs ensembles de définition.

La fonction f	*Domaine de définition de f*	*La dérivée f'*	*Domaine de définition de f'*
$x \longmapsto a\ ;\ a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$x \longmapsto 0$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto x$	$\mathbb{R}$	$x \longmapsto 1$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto ax+b\ ;\ a,b \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$x \longmapsto a$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto x^n\ ;\ n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$	$\mathbb{R}$	$x \longmapsto nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \sqrt{x}$	$[0;+\infty[$	$x \longmapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$
$x \longmapsto \dfrac{1}{x}$	$]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$	$x \longmapsto -\dfrac{1}{x^2}$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$

3.2- Règles de dérivation

u et v deux fonctions dérivables sur un même intervalle et $k \in \mathbb{R}$.

Dérivée de la somme	$(u+v)' = u'+v'$
Dérivée du produit par un scalaire	$(k.u)' = k.u'$
Dérivée du produit	$(u.v)' = u'.v + u.v'$

Dérivée du quotient	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.v - u.v'}{v^2}$
Dérivée de l'inverse	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$

Proposition 7 :

- Les fonctions polynômes sont dérivables sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions rationnelles sont dérivables sur tout intervalle où elles sont définies.

3.3- Signe de la dérivée, sens de variation

Proposition 8 :

Soit une fonction f dérivable sur un intervalle I.

- Si la fonction dérivée f' est nulle sur I, alors la fonction f est constante sur I.
- Si la fonction dérivée f' est strictement positive (*sauf en quelques points isolés de I où elle s'annule*), alors la fonction f est strictement croissante sur I.
- Si la fonction dérivée f' est strictement négative (*sauf en quelques points isolés de I où elle s'annule*), alors la fonction f est strictement décroissante sur I.

II- Dérivée de la composée de deux fonctions :

Proposition 9 :

Soient u et v deux fonctions définies respectivement sur les intervalles I et J tel que : $u(I) \subset J$ et $a \in I$.

- Si u est dérivable en a et v est dérivable en $u(a)$, alors $v \circ u$ est dérivable en a et : $(v \circ u)'(a) = u'(a) \times v'\big(u(a)\big)$
- Si u est dérivable sur I et v est dérivable sur J, alors $v \circ u$ est dérivable sur I et, pour tout x de I : $(v \circ u)'(x) = u'(x) \times v'\big(u(x)\big)$

Conséquences :

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$.

- La fonction u^n est dérivable sur I et $(u^n)' = n.u'.u^{n-1}$.
- Si u est strictement positive sur I alors $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et $\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$.

Exemple :

Calculons $f'(x)$ et $g'(x)$ sachant que :

$$f(x) = \left(x^3 - 2x + \sqrt{5}\right)^6 \text{ et } g(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 9}$$

III- Dérivée de la fonction réciproque :

Proposition 10 :

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I et $a \in I$.

❋ Si f est dérivable en a et $f'(a) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en $f(a)$ et on a :

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$$

❋ Si f est dérivable sur I et f' ne s'annule pas sur I, alors f^{-1} est dérivable sur $J = f(I)$, et pour tout x de J on a :

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Exemple :

f est la fonction définie sur l'intervalle $I = [-1; +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{1+x}$.

① Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1}.

② Calculer $f(3)$ puis déterminer $(f^{-1})'(2)$.

Application :

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $I = [0; +\infty[$ par : $g(x) = x + \sqrt{x}$.

① Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1}.

② Calculer $g(4)$ puis déterminer $(g^{-1})'(6)$.