MATHS

Chapitre 2

« Dérivation »

Niveau : 2ème Année Bac

PC & SVT

Prof : Bouyguir Taher

Contenu du chapitre 2

I. Dérivabilité d'une fonction numérique (Rappels) 1

1. le nombre dérivé ; la dérivée 1

2. Interprétations 2

a) Interprétation graphique 2

b) Interprétation numérique 3

3. Dérivées des fonctions usuelles 4

a) Dérivées des fonctions élémentaires 4

b) Les opérations sur les fonctions dérivées 4

c) Sens de variations d'une fonction 5

d) Extremums d'une fonction dérivable sur un intervalle 5

II. Dérivée de la composée de deux fonctions 6

III. Dérivée de fonctions réciproques 7

1. Dérivée de la fonction réciproque 7

2. Dérivée de la fonction racine $n^{ième}$ 8

I. Dérivabilité d'une fonction numérique (Rappels)

1. le nombre dérivé ; la dérivée

Définitions :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un élément de I.

- On dit que f est dérivable en a s'il existe un réel l tel que : $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=l$.

  Dans ce cas, on appelle l le **nombre dérivé de f en a** et on le note $f'(a)$.
- Si f est dérivable en tout élément de I, on dit que f est dérivable sur I.
- Lorsque la fonction f est dérivable sur I, on note f', **la fonction dérivée** qui à tout x de I associe son nombre dérivée $f'(x)$.

Propriété 1 :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un élément de I.

La fonction f est dérivable en a, si et seulement si, elle est dérivable à droite et à gauche en a et $f'_g(a)=f'_d(a)$.

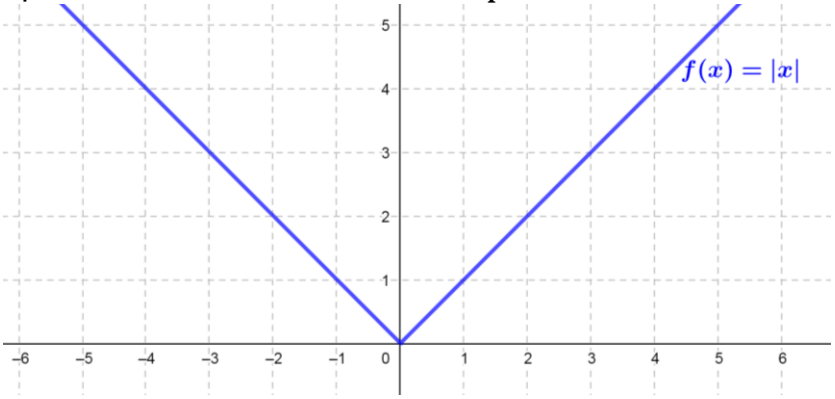
Propriété 2 :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un élément de I.

- Si f est dérivable en a alors f est continue en a.
- Si f est dérivable sur un intervalle I alors f est continue sur I.

Remarques :

- La réciproque de cette proposition est fausse : par exemple, la fonction valeur absolue $x\longmapsto|x|$ est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0.



- Si f est non continue en a alors f n'est pas dérivable en a.

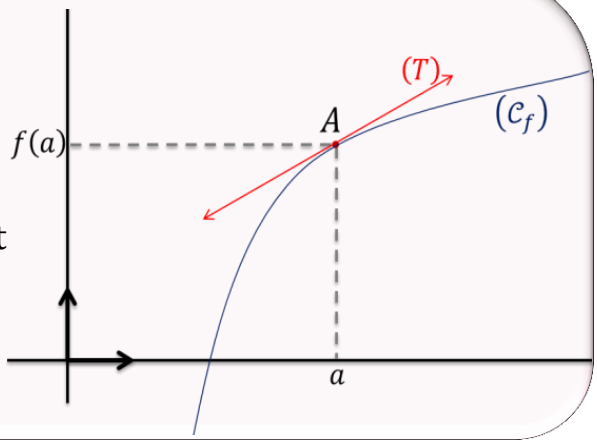
2. Interprétations

a) Interprétation graphique

Propriété 3 :

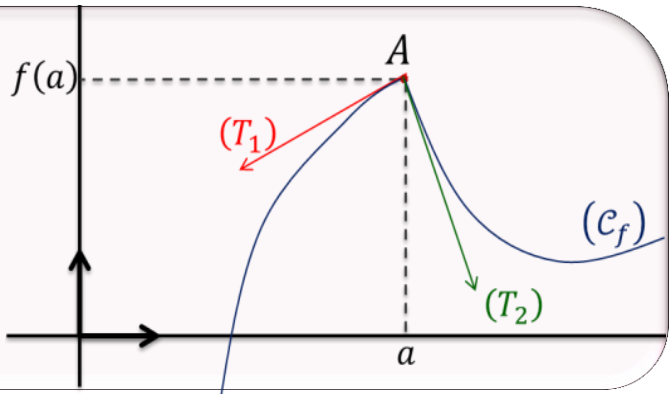
Lorsque f est dérivable en a, la courbe représentative $(\mathcal{C}_f)$ de la fonction f admet au point $A(a; f(a))$ une **tangente** (T) de coefficient directeur $f'(a)$ dont l'équation est :

$$(T) : \; y = f'(a).(x - a) + f(a)$$



Propriété 4 :

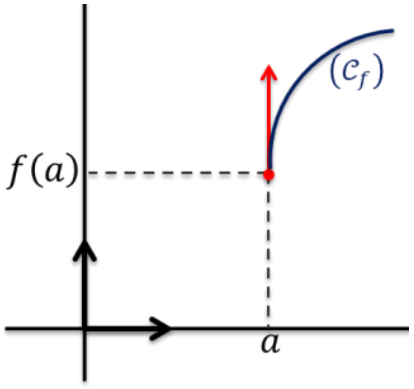
Si f est dérivable à droite en a (respectivement à gauche), alors la courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet une **demi-tangente** à droite (respectivement à gauche) en a.



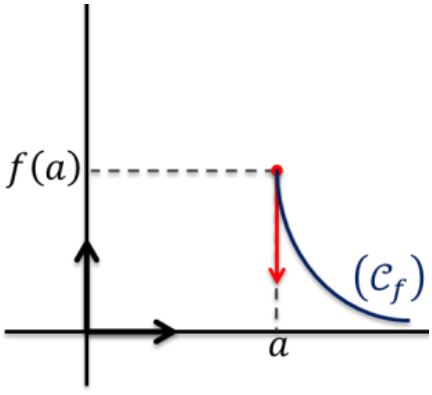
Propriété 5 :

Si f est continue à droite de a et $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \pm\infty$

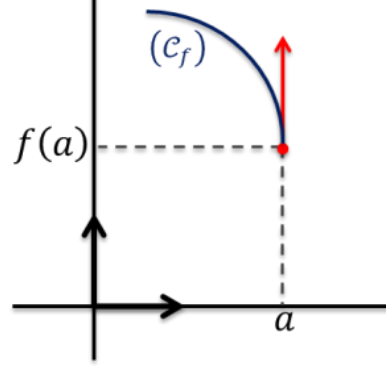
Alors la courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet une **demi-tangente verticale** à droite de a.



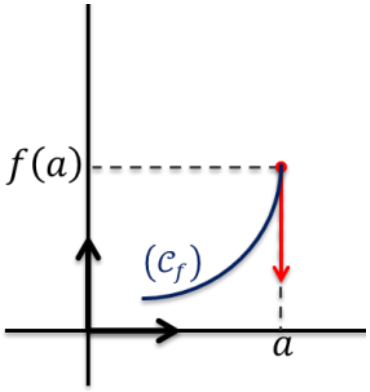
$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty$$



$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\infty$$



$$\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\infty$$



$$\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=+\infty$$

Application 1 :

On considère la fonction f définie par : $f(x)=x-\sqrt{x^2-x}$

① Montrer que l'ensemble de définition de f est : $\mathcal{D}_f=]-\infty;0]\cup[1;+\infty[$.

② Etudier la dérivabilité de f à gauche en 0 et à droite en 1; puis interpréter graphiquement les résultats obtenus.

b) Interprétation numérique

Propriété 6 :

Lorsqu'une fonction f est dérivable en a, une bonne approximation affine de f au voisinage de a est donnée par :

$$f(x)\approx f'(a).(x-a)+f(a)$$

Application 2 :

f est la fonction définie par : $f(x)=\sqrt{x+1}$.

① Calculez $f'(0)$ puis déterminez l'équation de la tangente de $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 0.

② Déterminez une fonction affine g, approximation locale de f au voisinage de 0.

③ Déduisez des valeurs approchées des nombres : $\sqrt{1{,}002}$ et $\sqrt{0{,}999}$

3. Dérivées des fonctions usuelles

a) Dérivées des fonctions élémentaires

Voici le tableau des dérivées usuelles ainsi que leurs ensembles de définition.

La fonction f	*Domaine de définition de f*	*La dérivée f'*	*Domaine de définition de f'*
$x \longmapsto a\ ;\ a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$x \longmapsto 0$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto x$	$\mathbb{R}$	$x \longmapsto 1$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto ax + b\ ;\ a, b \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$x \longmapsto a$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto x^n\ ;\ n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$	$\mathbb{R}$	$x \longmapsto nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \sqrt{x}$	$[0; +\infty[$	$x \longmapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$
$x \longmapsto \dfrac{1}{x}$	$]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$	$x \longmapsto -\dfrac{1}{x^2}$	$]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$x \longmapsto \sin x$	$\mathbb{R}$	$x \longmapsto \cos x$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \cos x$	$\mathbb{R}$	$x \longmapsto -\sin x$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \tan x$	$\mathbb{R} - \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$	$x \longmapsto 1 + \tan^2 x$	$\mathbb{R} - \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) Les opérations sur les fonctions dérivées

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un même intervalle I et $k \in \mathbb{R}$.

Dérivée de la ***somme***	$\boldsymbol{(u+v)' = u' + v'}$	
Dérivée du ***produit par un scalaire***	$\boldsymbol{(k.u)' = k.u'}$	
Dérivée du ***produit***	$\boldsymbol{(u.v)' = u'.v + u.v'}$	
Dérivée du ***quotient***	$\boldsymbol{\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'.v - u.v'}{v^2}}$	à condition que v ne s'annule pas sur I
Dérivée de ***l'inverse***	$\boldsymbol{\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}}$	

Application 3 : Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$f(x)=\frac{2x}{1+x^2}\ ;\qquad g(x)=\frac{3}{1+x^2}\ ;\qquad h(x)=\sqrt{x}\sin(x)+\cos(x)$$

Propriété 7 :

- Les fonctions polynômes sont dérivables sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions rationnelles sont dérivables sur tout intervalle où elles sont définies.

c) Sens de variations d'une fonction

Propriété 8 :

Soit une fonction f dérivable sur un intervalle I.

- Si la fonction dérivée f' est **nulle** sur I, alors la fonction f est **constante** sur I.
- Si la fonction dérivée f' est **strictement positive** (*sauf en quelques points isolés de I où elle s'annule*), alors la fonction f est **strictement croissante** sur I.
- Si la fonction dérivée f' est **strictement négative** (*sauf en quelques points isolés de I où elle s'annule*), alors la fonction f est **strictement décroissante** sur I.

d) Extremums d'une fonction dérivable sur un intervalle

Propriété 9 :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et a un élément de I.

- Si f' s'annule en a et change son signe au voisinage de a, alors f admet un extremum en a.
- Si f admet un extremum en a, alors $f'(a)=0$.

II. Dérivée de la composée de deux fonctions

Propriété 10 :

Soient u et v deux fonctions définies respectivement sur les intervalles I et J tel que : $u(I) \subset J$, et $a \in I$.

❋ Si u est dérivable en a et v est dérivable en $u(a)$, alors $v \circ u$ est dérivable en a et :

$$\boldsymbol{(v \circ u)'(a) = u'(a) \times v'\big(u(a)\big)}$$

❋ Si u est dérivable sur I et v est dérivable sur J, alors $v \circ u$ est dérivable sur I et, pour tout x de I : $\boldsymbol{(v \circ u)'(x) = u'(x) \times v'\big(u(x)\big)}$

Exemple : Déterminons la dérivée de la fonction $f : x \mapsto \cos\big(\sqrt{x}+1\big)$ sur $]0,+\infty[$

En posant : $v(x) = \cos(x)$ et $u(x) = \sqrt{x}+1$,

on aura pour tout $x \in]0,+\infty[$: $f(x) = v \circ u(x)$

Puisque v est dérivable sur $\mathbb{R}$ et u est dérivable sur $]0;+\infty[$

et que $u(]0,+\infty[) \subset \mathbb{R}$

Alors la fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et de plus, pour tout $x \in]0,+\infty[$:

$$f'(x) = u'(x) \times v'\big(u(x)\big) = \frac{-\sin\big(\sqrt{x}+1\big)}{2\sqrt{x}}$$

Application 4 :

① Montrer que la fonction $g : x \mapsto \sin(x^2 - x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$; puis déterminer sa dérivée.

② Montrer que la fonction $h : x \mapsto \tan\left(\frac{\pi}{x}\right)$ est dérivable sur $]1,2[$; puis déterminer sa dérivée.

Conséquences :

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$.

❋ La fonction u^n est dérivable sur I et $\boldsymbol{(u^n)' = n.u'.u^{n-1}}$

❋ Si u est strictement positive sur I alors $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et $\boldsymbol{\big(\sqrt{u}\big)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}}$

Application 5 :

① Montrer que la fonction $f: x \longmapsto \left(x^3 - 2x + \sqrt{5}\right)^6$ est dérivable sur $\mathbb{R}$; puis déterminer sa dérivée.

② Montrer que la fonction $g: x \longmapsto \sqrt{x^2 - 4x + 9}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$; puis déterminer sa dérivée.

III. Dérivée de fonctions réciproques

1. Dérivée de la fonction réciproque

Propriété 11 :

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I et $a \in I$.

❋ Si f est dérivable en a et $f'(a) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en $f(a)$ et on a :

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$$

❋ Si f est dérivable sur I et f' ne s'annule pas sur I, alors f^{-1} est dérivable sur $J = f(I)$, et pour tout x de J on a : $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

Application 6 :

f est la fonction définie sur l'intervalle $I = [-1; +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{1+x}$.

① Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1}.

② Calculer $f(3)$ puis déterminer $(f^{-1})'(2)$.

Application 7 :

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $I = [0; +\infty[$ par : $g(x) = x + \sqrt{x}$.

① Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1}.

② Calculer $g(4)$ puis déterminer $(g^{-1})'(6)$.

2. Dérivée de la fonction racine $n^{ième}$

Propriété 12 :

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2

- La fonction $x \to \sqrt[n]{x}$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et on a pour tout $x \in]0;+\infty[$:

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

- Si u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors la fonction $x \to \sqrt[n]{u(x)}$ est dérivable sur I et sa fonction dérivée est donnée par :

$$\left(\sqrt[n]{u(x)}\right)' = \frac{u'(x)}{n \times \left(\sqrt[n]{u(x)}\right)^{n-1}}$$

Propriété 13 :

Soit r un nombre rationnel non nul.

- La fonction $x \to x^r$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et on a pour tout $x \in]0;+\infty[$:

$$(x^r)' = r \times x^{r-1}$$

- Si u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors la fonction $x \to \left(u(x)\right)^r$ est dérivable sur I et sa fonction dérivée est donnée par :

$$\left(\left(u(x)\right)^r\right)' = r \times u'(x) \times \left(u(x)\right)^{r-1}$$

Application 8 : Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

$f(x) = \sqrt[3]{x}$; $f(x) = \sqrt[4]{x^3}$; $f(x) = \sqrt[3]{x^2+2x}$; $f(x) = \sqrt[4]{1+\cos^2(x)}$