Le contenu	Remarques

Dérivation et étude de fonctions

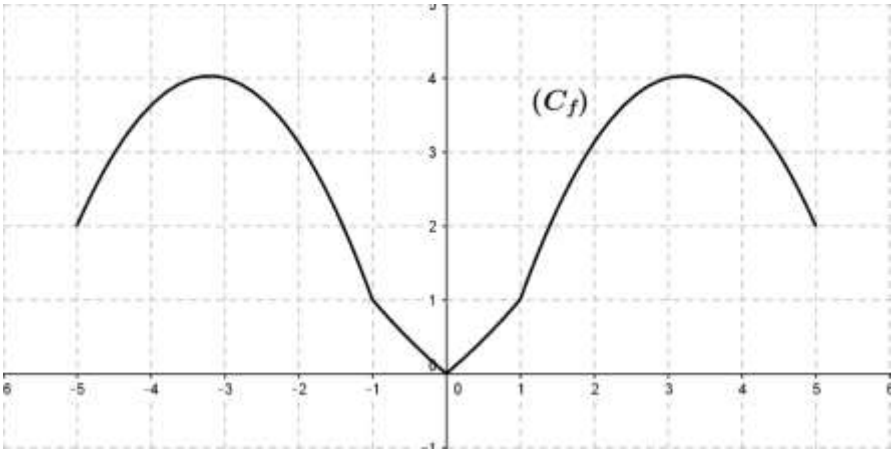
I. Rappel :

Activité 1 :

1) *On considère la fonction numérique f définie par $f(x) = x^2 + x - 2$.*
   a) *Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f.*
   b) *Calculer $f(0), f(1), f(2), f(-2) et f\left(\frac{1}{2}\right)$.*
   c) *Parmi les points suivants, déterminer ceux qui appartient au (C_f) la courbe représentative de la fonction f, en justifiant votre réponse. $A(1;0), B(-1;-2), C(0;3), D(2;5)$*
2) *On considère la fonction g définie comme suit : $g(x) = x^2 + ax$ tel que a est un nombre réel. Déterminer la valeur de a dans chacune des cas suivantes : $g(3) = 0; g(2) = -2$.*

Activité 2 :

On considère la fonction numérique f dont la représentation graphique dans un repère orthonormé est ci-dessous :



1) *Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f.*
2) *Déterminer l'image des nombres : $-3; -1; -2; 0 et 2$.*
3) *Déterminer l'antécédent de 1 puis l'antécédent de 4.*
4) *Déterminer la valeur maximale et la valeur minimale de la fonction f sur D_f .*
5) *Quelle la propriété géométrique qui vérifie (C_f) ? Déduire la parité de la fonction f.*

II. La dérivabilité d'une fonction numérique en un point :

Définition

On dit que la fonction f est dérivable en x_0 si et seulement s'il existe un nombre réel l tel que : $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l$ ou $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = l$

Le nombre l est appelé le nombre dérivé de f et on écrit $f'(x_0) = l$.

Remarque :

Si f est dérivable en x_0 alors l'équation de la tangente au (C_f) en point d'abscisse x_0 est : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Exemples :

Etudier la dérivabilité de la fonction fen x_0,puis déterminer l'équation de la tangente au (C_f) en x_0 dans chacune des cas suivants : $f(x) = 3x - 2x_0 = 1$

$f(x) = x^2 - 1x_0 = 2$.

III. La fonction dérivée :

1) Les dérivées des fonctions usuelles :

f(x)	f′(x)	L'intervalle
k	0	$\mathbb{R}$
ax	a	$\mathbb{R}$
x^2	2x	$\mathbb{R}$
x^n	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

✍Application :

Calculer la dérivé de la fonction f dans les cas suivants :

$f(x)=3$; $f(x)=\frac{1}{2}$; $f(x)=x$; $f(x)=4x$; $f(x)=x^2$; $f(x)=2x^2$

$f(x)=x^3$; $f(x)=\frac{1}{9}x^3$; $f(x)=x^4$; $f(x)=\frac{1}{x}$

2) Opération sur les dérivés :

La fonction	Sa dérivé	Les conditions
$f+g$	$f'+g'$	
$kf(k\in\mathbb{R})$	$kf'(k\in\mathbb{R})$	
$f\times g$	$f'\times g+f\times g'$	
$\frac{1}{f}$	$-\frac{f'}{f^2}$	f ne s'annule pas sur I .
$\frac{f}{g}$	$\frac{f'\times g-f\times g'}{g^2}$	g ne s'annule pas sur I.
$\sqrt{f}$	$\frac{f'}{2\sqrt{f}}$	f est strictement positif sur I .

✍Application : Calculer le dérivé de la fonction f dans les cas suivants :

$f(x)=3x-2$; $f(x)=\frac{1}{2}x^2+4$; $f(x)=x^3+5x^2+x-2$; $f(x)=\frac{1}{x-2}$

$f(x)=\frac{x-1}{2x+3}$; $f(x)=(2x-1)(3x+4)$; $f(x)=\sqrt{x+3}$; $f(x)=\sqrt{3x-4}$

IV. Monotonie d'une fonction et le signe de son dérivé :

Activité 1 :

Poser le tableau du signe des expressions suivantes :

• $4x+1$	• $-2x+2$	• $(4x+1)(-2x+2)$

Propriété

Soient Iun intervalle de $\mathbb{R}$ et fune fonction dérivable sur I.

- f est constante sur Isi et seulement si $f'(x)=0\ \forall x\in I$.
- f est croissante sur Isi et seulement si $f'(x)\geq 0\ \forall x\in I$.
- f est décroissante sur Isi et seulement si $f'(x)\leq 0\ \forall x\in I$.

✍Application :

Etudier la monotonie de la fonction f dans les cas suivants :

$f(x) = 4x^3 + 2x - 1$ $\qquad$ $f(x) = \frac{1}{5x^3-7}$

$f(x) = (3x-2)^5$ $\qquad$ $f(x) = \frac{2x+1}{3x-5}$

V. Limite d'une fonction :

Propriété

- La limite d'une fonction polynôme est la limite de son monôme de plus haut degré .
- **Si** $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ avec Pet Q sont deux polynômes,

  Alors $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\text{le monôme de plus haut degré de P}}{\text{le monôme de plus haut degré de Q}}$.
- $\lim\limits_{x\to -\frac{d}{c}} \frac{ax+b}{cx+d} = +\infty$ ou $-\infty$

✍Application : Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 1} x+1$; $\lim\limits_{x\to -2} x^2+x+2$; $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^2$; $\lim\limits_{x\to+\infty} -5x^3$; $\lim\limits_{x\to-\infty} 3x^2$

$\lim\limits_{x\to-\infty} 3x^5$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{2}x^2+2x-2$; $\lim\limits_{x\to+\infty} -4x^3+2x^2-2$; $\lim\limits_{x\to-\infty} x^6+2x^3-2x+1$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x}{3x+4}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2-3x}{7x+1}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x+5}{2x-3}$; $\lim\limits_{x\to 1} \frac{2-3x}{7x+1}$; $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{2-x}{x-1}$

Remarque :

- Si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = l$ alors la droite d'équation $y = l$ est une asymptote horizontale de la courbe (C_f).
- Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ alors la droite de l'équation $x = x_0$ est une asymptote verticale de la courbe (C_f) .

✍Application :

Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f et les droites asymptotes au la courbe (C_f) dans chacun des cas suivants

$f(x) = \frac{2x+1}{3x+4}$ $f(x) = \frac{3x+5}{-2x+3}$ $f(x) = \frac{1-3x}{4x+3}$ $f(x) = \frac{2x+1}{1-2x}$

VI. L'équation $f(x) = a$ et l'inéquation $f(x) \leq a$

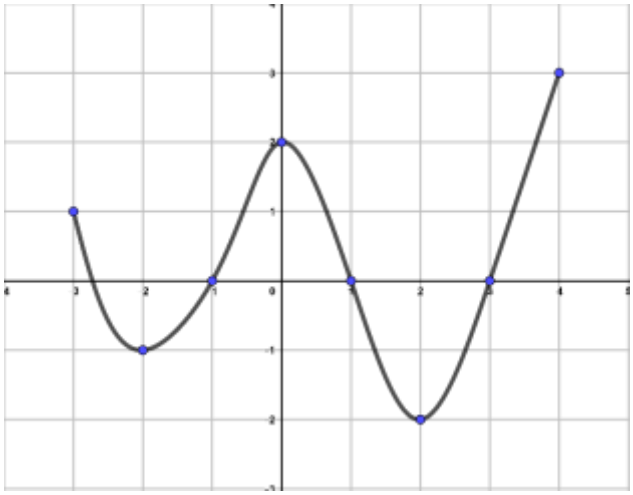
Propriété

Soient fune fonction numérique et (C_f)sa courbe représentative et aun nombre réel.

- L'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = a$ sont les abscisses des points d'intersection de (C_f)et la droite d'équation $y = a$.
- L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \leq a$ sont les intervalles où (C_f) situé au-dessous la droite d'équation $y = a$.

Application :

La courbe ci-dessous est la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(o;\vec{i};\vec{j})$ sur l'intervalle $[-3;4]$.



1) Déterminer D_f.
2) Dresser le tableau de variation de f.
3) Déterminer la valeur minimale et la valeur maximale de la fonction f
4) Résoudre les équation $f(x) = -2$ et $f(x) = -1$.
5) Résoudre les inéquation $f(x) \leq 1 et f(x) \geq -1$.

VII. L'étude de quelques fonctions numériques

1) L'étude d'une fonction polynôme :

Exemple :

On considère la fonction f définie par : $f(x) = x^2 - 2x - 3$

1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f.
2) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
3) a) Montrer que $(\forall x \in D_f) f'(x) = 2x - 2$.
   b) Dresser le tableau de variation de la fonction fsur D_f
4) a) Compléter le tableau suivant

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)							

b)Tracer $C_f$la courbe représentative de la fonction f.

Exercice :

On considère la fonction f définie par : $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2$

1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f.
2) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
3) a) Montrer que $(\forall x \in D_f) f'(x) = 6x(x-1)$.
   b) Dresser le tableau de variation de la fonction fsur D_f
4) a) Compléter le tableau suivant

x	-1	0	2
f(x)			

b) Tracer $C_f$la courbe représentative de la fonction f.

5) a) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de chacune des inéquations suivantes :
   $f(x) = 2$, $f(x) = 1$ et $f(x) = -1$
   b) Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x) \geq -3$.

2) L'étude d'une fonction $x \to \sqrt{ax+b}$

Exemple :

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{2x+2}$

1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f.

2) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

3) a) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in D_f$.

b) Dresser le tableau de variation de la fonction fsur D_f

4) a) Compléter le tableau suivant

x	-1	$-\frac{1}{2}$	1
f(x)			

b) Tracer $C_f$la courbe représentative de la fonction f.

Exercice :

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{2x-3}$

1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f.

2) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

3) a) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in D_f$.

b) Dresser le tableau de variation de la fonction fsur D_f

4) a) Compléter le tableau suivant

x	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{7}{2}$
f(x)			

b) Tracer $C_f$la courbe représentative de la fonction f.