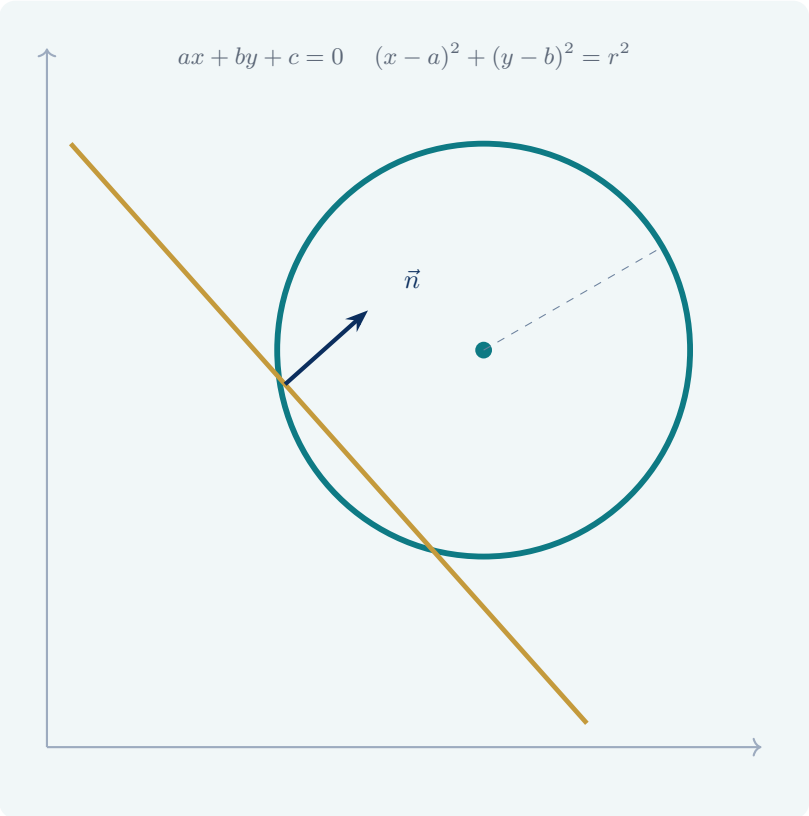
Prof. Taher Bouyguir

Professeur de mathématiques
Secondaire qualifiant

Prof Taher
Prof Taher Bouyguir
Taher Bouyguir
Contact WhatsApp
Telegram
mr.bouyguir@gmail.com
www.proftaher.com

CHAPITRE 10

Équations de droite et de cercle



Cours et corrigés des applications

1ère Spé Maths

10
Cours

Équations de droite et de cercle

Capacités attendues

- Déterminer une équation cartésienne de droite connaissant un vecteur directeur et un point.
- Déterminer une équation cartésienne de droite connaissant un vecteur normal et un point.
- Déterminer un vecteur normal connaissant une équation cartésienne d'une droite.
- Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur une droite.
- Déterminer une équation cartésienne d'un cercle connaissant centre et rayon, ou connaissant un diamètre.
- Reconnaître une équation de cercle et déterminer le centre et le rayon.
- Utiliser un repère pour étudier une configuration.

Prérequis : colinéarité ($\vec{u}\,(x\,;y)$ et $\vec{v}\,(x'\,;y')$ colinéaires $\iff xy'-x'y=0$), équation réduite $y=mx+p$, produit scalaire analytique et cercle de diamètre $[AB]$ (Chap 6), forme canonique (Chap 1). Dans tout le chapitre, le repère est **orthonormé**.

Table des matières

I Équation cartésienne et vecteur directeur . . . 3
II Vecteur normal à une droite . . . 4
III Projeté orthogonal d'un point sur une droite . . . 6
IV Équation d'un cercle . . . 7
V Utiliser un repère pour étudier une configuration . . . 9
Corrigés des applications . . . 11

I Équation cartésienne et vecteur directeur

Définition 1 : vecteur directeur

Un **vecteur directeur** d'une droite d est un vecteur non nul $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, où A et B sont deux points distincts de d.

Théorème : équation cartésienne

- Toute droite admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$, avec $(a\,;b) \neq (0\,;0)$: c'est une **équation cartésienne**.
- Réciproquement, l'ensemble des points $M(x\,;y)$ tels que $ax + by + c = 0$ (avec $(a\,;b) \neq (0\,;0)$) est une droite, de vecteur directeur $\vec{u}\,(-b\,;a)$.

Démonstration

Soit d la droite passant par $A(x_A\,;y_A)$ de vecteur directeur $\vec{u}\,(\alpha\,;\beta)$. Pour $M(x\,;y)$:

$$M \in d \iff \overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{u} \text{ colinéaires} \iff (x-x_A)\beta-(y-y_A)\alpha = 0 \iff \beta x-\alpha y+(\alpha y_A-\beta x_A) = 0,$$

qui est de la forme $ax + by + c = 0$ avec $a = \beta$, $b = -\alpha$: on retrouve bien $\vec{u}\,(-b\,;a)$. □

Méthode : équation avec un point et un vecteur directeur

$M(x\,;y) \in d \iff \det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0$: on écrit ce déterminant et on développe.

Exemple

- d passe par $A(1\,;2)$ et a pour vecteur directeur $\vec{u}\,(3\,;-1)$. $\overrightarrow{AM}\,(x-1\,;y-2)$:

$$(x-1)\times(-1)-(y-2)\times 3 = 0 \iff -x+1-3y+6 = 0 \iff x+3y-7 = 0.$$

  Vérification : $1 + 3 \times 2 - 7 = 0$. ✓
- La droite (AB) avec $A(2\,;1)$, $B(-1\,;3)$: $\overrightarrow{AB}\,(-3\,;2)$, $(x-2)\times 2-(y-1)\times(-3) = 0 \iff 2x + 3y - 7 = 0$.

Remarque

- Une droite a une infinité d'équations cartésiennes (on peut tout multiplier par un réel non nul).
- Si $b \neq 0$, on retrouve l'équation réduite $y = mx+p$: un vecteur directeur est alors $(1\,;m)$. Si $b = 0$, la droite est verticale : $x = k$.

Application 1

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par $A(-1\,;4)$ de vecteur directeur $\vec{u}\,(2\,;5)$.
2. Soit $d : 3x - 2y + 6 = 0$. Donner un vecteur directeur de d, un point de d et son coefficient directeur.
3. Déterminer une équation cartésienne de la droite (BC) avec $B(1\,;-2)$ et $C(4\,;0)$.

Ma réponse :

II Vecteur normal à une droite

Définition 2 : vecteur normal

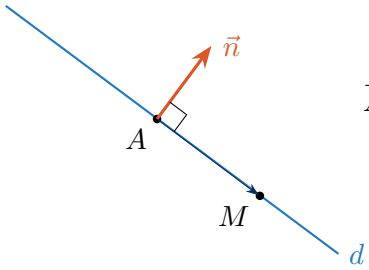
Un vecteur $\vec{n}$ **non nul** est **normal** à la droite d s'il est orthogonal à un vecteur directeur de d.

Propriété 1

- La droite d'équation $ax + by + c = 0$ admet pour vecteur normal $\vec{n}\,(a\,;b)$.
- La droite passant par $A(x_A\,;y_A)$ et de vecteur normal $\vec{n}\,(a\,;b)$ a pour équation $a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$.

Démonstration

Un vecteur directeur de $d : ax + by + c = 0$ est $\vec{u}\,(-b\,;a)$ et $\vec{n} \cdot \vec{u} = -ab + ba = 0$: $\vec{n}$ est normal.
Pour le second point : $M \in d \iff \overrightarrow{AM} \perp \vec{n} \iff \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \iff a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$. □



$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$

Exemple

- Droite passant par $A(2\,;-1)$ de vecteur normal $\vec{n}\,(3\,;4)$: $3(x-2)+4(y+1)=0 \iff 3x+4y-2=0$.
- La droite $d : 2x-5y+1=0$ a pour vecteur normal $\vec{n}\,(2\,;-5)$.

Remarque

Deux droites sont **perpendiculaires** si et seulement si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux ; elles sont **parallèles** si et seulement si leurs vecteurs normaux sont colinéaires.

Application 2

1. Déterminer une équation de la droite passant par $A(1\,;3)$ de vecteur normal $\vec{n}\,(-2\,;1)$.
2. On donne $A(1\,;1)$, $B(5\,;2)$ et $C(2\,;6)$. Déterminer une équation de la hauteur du triangle ABC issue de C.
3. Les droites $d : x-4y+7=0$ et $d' : 4x+y=0$ sont-elles perpendiculaires ?

Ma réponse :

III Projeté orthogonal d'un point sur une droite

Définition 3 : projeté orthogonal

Le **projeté orthogonal** d'un point A sur une droite d est le point H de d tel que $(AH) \perp d$. La distance AH est la **distance du point A à la droite** d : c'est la plus courte distance de A à un point de d.

Méthode : coordonnées du projeté orthogonal

1. Déterminer un vecteur directeur $\vec{u}$ de d.
2. Écrire une équation de la droite d' passant par A et de vecteur normal $\vec{u}$ (c'est la perpendiculaire à d en passant par A).
3. Résoudre le système formé par les équations de d et d' : la solution donne les coordonnées de H.

Exemple

$d : x + 2y - 4 = 0$ et $A(3\,;5)$.

- Vecteur directeur de d : $\vec{u}\,(-2\,;1)$.
- $d' : -2(x-3) + 1(y-5) = 0 \iff y = 2x - 1$.
- On remplace dans d : $x + 2(2x-1) - 4 = 0 \iff 5x = 6 \iff x = \dfrac{6}{5}$, puis $y = \dfrac{12}{5} - 1 = \dfrac{7}{5}$.

$H\left(\dfrac{6}{5}\,;\dfrac{7}{5}\right)$.

Distance : $\overrightarrow{AH}\left(-\dfrac{9}{5}\,;-\dfrac{18}{5}\right)$, $AH = \dfrac{\sqrt{81+324}}{5} = \dfrac{\sqrt{405}}{5} = \dfrac{9\sqrt{5}}{5} \approx 4{,}02$.

Application 3

Soit $d : 2x - y + 1 = 0$ et $A(4\,;1)$. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H de A sur d, puis la distance de A à d.

Ma réponse :

IV Équation d'un cercle

Propriété 2 : cercle de centre et rayon donnés

Le cercle de centre $\Omega(a\,;b)$ et de rayon r a pour équation :

$$\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2=r^2}$$

Démonstration

$M(x\,;y)$ appartient au cercle $\iff \Omega M=r \iff \Omega M^2=r^2 \iff (x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ (car ΩM et r sont positifs). □

Exemple

Le cercle de centre $\Omega(2\,;-3)$ et de rayon 4 : $(x-2)^2+(y+3)^2=16$. Le point $A(2\,;1)$ lui appartient : $0+4^2=16$. ✓

Propriété 3 : cercle de diamètre $[AB]$

Le cercle de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ (Chap 6). Son équation est :

$$(x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)=0.$$

Exemple

$A(-1\,;2)$, $B(3\,;0)$: $(x+1)(x-3)+(y-2)(y-0)=0 \iff x^2+y^2-2x-2y-3=0$.
On peut aussi utiliser le centre $I(1\,;1)$ et le rayon $\dfrac{AB}{2}=\sqrt{5}$: $(x-1)^2+(y-1)^2=5$, qui se développe en la même équation.

Méthode : reconnaître une équation de cercle

Pour une équation $x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0$, on fait apparaître des carrés (comme pour la forme canonique) :

$$x^2-4x=(x-2)^2-4 \quad ; \quad y^2+6y=(y+3)^2-9.$$

On obtient $(x-a)^2+(y-b)^2=k$. Si $k>0$: cercle de centre $(a\,;b)$ et de rayon $\sqrt{k}$; si $k=0$: un seul point ; si $k<0$: ensemble vide.

Exemple

$x^2+y^2-4x+6y-3=0 \iff (x-2)^2-4+(y+3)^2-9-3=0 \iff (x-2)^2+(y+3)^2=16$: cercle de centre $(2\,;-3)$ et de rayon 4.

Application 4

1. Déterminer une équation du cercle de centre $\Omega(-1\,;2)$ et de rayon 3.
2. Déterminer une équation du cercle de diamètre $[AB]$ avec $A(1\,;0)$ et $B(5\,;4)$.
3. Reconnaître l'ensemble d'équation $x^2+y^2+2x-8y+8=0$.
4. Même question avec $x^2+y^2-6x+10=0$.

Ma réponse :

Application 5

Déterminer les coordonnées des points d'intersection du cercle $\mathcal{C}$: $x^2+y^2=25$ et de la droite d : $y=x+1$.

Ma réponse :

V Utiliser un repère pour étudier une configuration

Méthode : problème de géométrie en coordonnées

1. Choisir un repère orthonormé adapté à la figure (une origine en un sommet, des axes le long des côtés…).
2. Écrire les coordonnées des points utiles.
3. Traduire la question : alignement (colinéarité), perpendicularité (produit scalaire nul), longueur, appartenance à une droite ou à un cercle (équation).

Exemple

$ABCD$ est un rectangle tel que $AB = 4$ et $AD = 2$, et M est le milieu de $[CD]$. Montrer que le triangle AMB est rectangle en M.
Dans le repère orthonormé d'origine A (axes (AB) et (AD)) : $A(0\,;0)$, $B(4\,;0)$, $C(4\,;2)$, $D(0\,;2)$, $M(2\,;2)$.
$\overrightarrow{MA}\,(-2\,;-2)$ et $\overrightarrow{MB}\,(2\,;-2)$: $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = -4+4 = 0$. Le triangle AMB est rectangle en M : M est sur le cercle de diamètre $[AB]$.

Application 6

(Synthèse) On donne $A(-2\,;1)$, $B(4\,;3)$ et $C(2\,;-3)$.

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB).
2. Déterminer une équation de la hauteur issue de C dans le triangle ABC.
3. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H de C sur (AB).
4. Calculer AB et CH, puis l'aire du triangle ABC.

Ma réponse :

Corrigés des applications

Corrigé de l'application 1

1. $\overrightarrow{AM}(x+1\,;y-4)$: $(x+1)\times 5-(y-4)\times 2=0 \iff 5x-2y+13=0$.
2. $a=3$, $b=-2$: vecteur directeur $\vec{u}(2\,;3)$. Point : $x=0$ donne $y=3$, donc $(0\,;3)\in d$. $y=\frac{3}{2}x+3$: coefficient directeur $\frac{3}{2}$.
3. $\overrightarrow{BC}(3\,;2)$: $(x-1)\times 2-(y+2)\times 3=0 \iff 2x-3y-8=0$.

Corrigé de l'application 2

1. $-2(x-1)+(y-3)=0 \iff -2x+y-1=0$, soit $2x-y+1=0$.
2. La hauteur issue de C passe par C et a pour vecteur normal $\overrightarrow{AB}(4\,;1)$: $4(x-2)+(y-6)=0 \iff 4x+y-14=0$.
3. $\vec{n}(1\,;-4)$ et $\vec{n}'(4\,;1)$: $\vec{n}\cdot\vec{n}'=4-4=0$. Oui, $d\perp d'$.

Corrigé de l'application 3

Vecteur directeur de d : $\vec{u}(1\,;2)$. Perpendiculaire en A : $1(x-4)+2(y-1)=0 \iff x+2y-6=0$.
Dans d : $y=2x+1$, donc $x+2(2x+1)-6=0 \iff 5x=4 \iff x=\frac{4}{5}$ et $y=\frac{13}{5}$. $H\left(\frac{4}{5}\,;\frac{13}{5}\right)$.
$\overrightarrow{AH}\left(-\frac{16}{5}\,;\frac{8}{5}\right)$: $AH=\frac{\sqrt{256+64}}{5}=\frac{\sqrt{320}}{5}=\frac{8\sqrt{5}}{5}\approx 3{,}58$.

Corrigé de l'application 4

1. $(x+1)^2+(y-2)^2=9$.
2. Centre $I(3\,;2)$, rayon $\frac{AB}{2}=\frac{\sqrt{32}}{2}=2\sqrt{2}$: $(x-3)^2+(y-2)^2=8$.
3. $(x+1)^2-1+(y-4)^2-16+8=0 \iff (x+1)^2+(y-4)^2=9$: cercle de centre $(-1\,;4)$ et de rayon 3.
4. $(x-3)^2-9+y^2+10=0 \iff (x-3)^2+y^2=-1$: impossible, c'est l'ensemble vide.

Corrigé de l'application 5

On remplace y : $x^2+(x+1)^2=25 \iff 2x^2+2x-24=0 \iff x^2+x-12=0$. $\Delta=49$: $x=3$ ou $x=-4$.
Points d'intersection : $(3\,;4)$ et $(-4\,;-3)$.

Corrigé de l'application 6

1 $\overrightarrow{AB}(6\,;2) : (x+2)\times 2-(y-1)\times 6=0 \iff 2x-6y+10=0 \iff x-3y+5=0.$

2 Vecteur normal $\overrightarrow{AB}(6\,;2)$, ou $(3\,;1) : 3(x-2)+(y+3)=0 \iff 3x+y-3=0.$

3 $x=3y-5$ dans $3x+y-3=0 : 9y-15+y-3=0 \iff y=\dfrac{9}{5}$, puis $x=\dfrac{27}{5}-5=\dfrac{2}{5}$.

$H\left(\dfrac{2}{5}\,;\dfrac{9}{5}\right)$.

4 $AB=\sqrt{36+4}=2\sqrt{10}\,;\ \overrightarrow{CH}\left(-\dfrac{8}{5}\,;\dfrac{24}{5}\right),\ CH=\dfrac{\sqrt{640}}{5}=\dfrac{8\sqrt{10}}{5}.$

$\text{Aire}=\dfrac{AB\times CH}{2}=\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{10}\times\dfrac{8\sqrt{10}}{5}=\dfrac{80}{5}=16.$