Equations différentielles

Pr. Taher BOUYGUIR

Activité :

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2e^{-4x}$.
On pose $y = f(x)$ et $y' = f'(x)$ et $y'' = f''(x)$.
Montrer que : $y'' + 3y' - 4y = 0$.

Toutes les équations où l'inconnue est une fonction, et qui se présente sous la forme d'une relation entre cette fonction et ses dérivées est appelée ***équation différentielle.***

I. Equations différentielles du premier ordre :

1. L'équation différentielle $y' = ay$ $(a \in \mathbb{R}^*)$

Propriété :

Soit a un nombre réel non nul.
Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = ay$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :
$x \longmapsto ke^{ax}$ où k est un nombre réel quelconque.

Remarque :

Pour tout $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, il existe une solution unique f de l'équation différentielle $\boldsymbol{y' = ay}$, vérifiant la condition $\boldsymbol{f(x_0) = y_0}$.

Exemple :

Les solutions de l'équation $(E): y' + 2y = 0$ sont
$x \longmapsto$----------
Si f est une solution de l'équation (E) vérifiant la condition $f(0) = 3$. Alors :

Application ① :

1. Résoudre les équations différentielles suivantes :
① $y' = 3y$ **②** $y' + 5y = 0$
2. a. Résoudre l'équation (E) : $3y' - 2y = 0$.
b. Déterminer la solution de (E) qui vérifie $y(3) = -1$.

2. L'équation différentielle $y' = ay + b$

Propriété :

Soient a et b deux nombres réels tels que $a \neq 0$.
Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sont les des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par
$x \longmapsto ke^{ax} - \frac{b}{a}$ où k est un réel quelconque.

Application ② :

1. Résoudre l'équation différentielle :
$(E) : y' + 2y - 4 = 0$
2. Déterminer la solution de (E) dont la courbe passe par le point $A(-ln(2), 6)$

II. Equation différentielles du second ordre :

$$\boldsymbol{y'' + ay' + by = 0}$$

Définition :

Soient a et b deux nombres réels.
L'équation $r^2 + ar + b = 0$, où r est l'inconnue, s'appelle ***l'équation caractéristique*** de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$.

Soit $\Delta = a^2 - 4b$ le discriminant l'équation caractéristique $(E) : r^2 + ar + b = 0$

Si Δ →

→

Application ③ :

1. Résoudre les équations différentielles suivantes :

(E_1): $y'' - 3\,y' + 2y = 0$. (E_2): $y'' + 4\,y' + 4y = 0$

(E_3): $y'' - 4\,y' + 13y = 0$.

2. **a.** Résoudre l'équation différentielle :

(E'): $y'' - 5\,y' + 6y = 0$

b. Déterminer la solution g de l'équation (E') vérifiant les conditions initiales : $g(0) = 1$ et $g'(0) = 2$

3. **a.** Résoudre l'équation (E''): $y'' + 4y = 0$

b. Déterminer la solution g de l'équation (E'') vérifiant les conditions initiales : $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ et $g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$.