Chapitre 9

Les équations différentielles

Niveau : 2ème Année Bac

PC & SVT

MATHEMATIQUES

~Prof : Bouyguir Taher~

Contenu du chapitre 9

I. Introduction, vocabulaire et notations 2

II. L'équation différentielle : $y' = ay + b$..... 3

1. L'équation : $y' = ay$ où $a \in \mathbb{R}^*$ 3
2. L'équation : $y' = ay + b$ où $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$..... 4

III. L'équation différentielle : $y'' + ay' + by = 0$..... 5

1. L'équation caractéristique de l'équation $y'' + ay' + by = 0$ 5
2. Résolution de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$ 5

I. Introduction, vocabulaire et notations

➤ La notion d'équation différentielle apparait vers 1690 ; comme souvent en mathématiques, la résolution de certains cas particuliers, avait précédé l'étude du problème général. Ce sont des problèmes d'origine mécanique et géométrique qui sont à la base de l'introduction des équations différentielles. Citons par exemple :

- l'étude du mouvement du pendule circulaire ;
- le problème du mouvement de deux corps s'attirant suivant la loi de gravitation newtonienne ;
- les problèmes du mouvement des tiges, ressorts, cordes vibrantes ;

➤ Une équation différentielle est une équation :

- dont l'inconnue est une fonction (généralement notée y)
- dans laquelle apparaît certaines des dérivées de y (dérivée première y' ou dérivées d'ordre supérieur y'', ...).

➤ L'ordre d'une équation différentielle correspond au degré maximal de dérivation auquel l'une des fonctions inconnues a été soumise.

➤ On appelle solution d'une équation différentielle (E) toute fonction f vérifiant (E).

➤ Résoudre une équation différentielle, c'est trouver toutes les fonctions solutions.

Exemples :

1) L'équation différentielle : $y' = 4x - 1$ a pour solution les fonctions primitives de la fonction : $x \mapsto 4x - 1$ qui sont : $x \mapsto 2x^2 - x + k$ où k est un réel

2) Rechercher les primitives d'une fonction continue f sur un intervalle I, c'est résoudre, sur I, l'équation différentielle : $y' = f(x)$

3) L'équation (E) : $y' - 3y = 0$ est une équation différentielle linéaire du premier ordre sans second membre.

La fonction $x \mapsto y(x) = 5e^{3x}$ est une solution de l'équation (E).

4) L'équation $y' - 3y = 2\sin x$ est une équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre.

5) L'équation $y'' - 5y' + 3y = e^{3x} - 2$ est une équation différentielle linéaire du second ordre avec second membre.

Ces deux derniers types d'équation sont hors programme.

II. L'équation différentielle : $y' = ay + b$

1. L'équation : $y' = ay$ où $a \in \mathbb{R}^*$

Propriété 1 :

Soit a un réel non nul.
La solution générale de l'équation différentielle $y' = ay$ est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $y(x) = ke^{ax}$ où k est une constante quelconque.

Remarque :

L'équation différentielle $y' = ay$ admet une infinité de solutions (puisque l'on a une infinité de choix de la constante k).

Exemple :

Résolvons l'équation différentielle (E) suivante : $3y' - 2y = 0$.

L'équation (E) est équivalente à $y' = \frac{2}{3}y$.

L'ensemble des solutions de (E) est constitué des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$y(x) = ke^{\frac{2}{3}x} \text{ où } k \text{ est une constante réelle.}$$

Application 1 :

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $(E_1) : y' - 3y = 0$ 2. $(E_2) : y' + y = 0$

Propriété 2 :

Soient x_0 et y_0 deux réels.
L'équation différentielle $y' = ay$ admet une unique solution f satisfaisant la condition initiale $f(x_0) = y_0$.

Exemple :

On considère l'équation différentielle (E) : $y' - y = 0$.

Déterminons l'unique solution f de (E) dont la représentation graphique passe par le point de coordonnées $(0 ; 1)$.

Les solutions de (E) sont les fonctions : $f(x) = ke^x$ où $k \in \mathbb{R}$.

Pour déterminer la constante, on a : $f(0) = 1$, donc $ke^0 = 1$, d'où $k = 1$.

La fonction recherchée est la fonction exponentielle népérienne.

2. L'équation : $y' = ay + b$ où $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$

Propriété 3 :

Soient a un réel non nul et b un réel.
La solution générale de l'équation différentielle $y' = ay + b$ est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $y(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}$ où k est une constante quelconque.

Remarque :

Le réel k dans la solution générale de l'équation différentielle peut être déterminé par la condition initiale.

Exemple :

Résolvons l'équation différentielle (E) : $\sqrt{3}y' - 3y = 1$.

L'équation (E) est équivalente à $y' = \sqrt{3}y + \frac{\sqrt{3}}{3}$.

(E) est donc de la forme $y' = ay + b$ avec $a = \sqrt{3}$ et $b = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Les solutions de (E) sont donc de la forme :

$$y(x) = \lambda e^{\sqrt{3}x} - \frac{1}{3} \text{ où } \lambda \text{ est une constante réelle.}$$

Cas particuliers :

- Si $a = 0$, alors l'équation différentielle $y' = ay + b$ se réduit simplement à $y' = b$ dont les solutions sont les fonctions affines $x \mapsto bx + k$ où k est une constante.
- Si $b = 0$, on est ramené au cas de la situation du paragraphe **II.1.**

Application 2 :

Soit l'équation différentielle suivante : (E) : $3y' - 5y - 2 = 0$.

1. Résoudre l'équation différentielle (E)
2. Déterminer la solution f de (E) qui vérifie la condition initiale $f(0) = 1$

Application 3 :

Soit l'équation différentielle suivante : (E) : $2y' + y = 1$.

1. Résoudre l'équation différentielle (E)
2. Déterminer la solution f de (E) qui vérifie $f'(-1) = 2$

III. L'équation différentielle : $y'' + ay' + by = 0$

Soient a et b deux réels quelconques.
Dans tout ce qui suit, nous noterons (**E**) l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$

1. L'équation caractéristique de l'équation $y'' + ay' + by = 0$

Définition :

L'équation $r^2 + ar + b = 0$ à variable réelle r, s'appelle **l'équation caractéristique** associée à l'équation différentielle (**E**).

Exemples :

- L'équation caractéristique de l'équation différentielle $y'' - 2y' + 5y = 0$ est :
$$r^2 - 2r + 5 = 0$$
- L'équation caractéristique de l'équation différentielle $y'' + 2y' = 0$ est :
$$r^2 + 2r = 0$$

2. Résolution de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$

Propriété 4 :

Soit (E') : $r^2 + ar + b = 0$ l'équation caractéristique associée à l'équation (**E**).

Le discriminant de (E') est : $\Delta = a^2 - 4b$

- Si $\Delta > 0$, l'équation (E') a deux racines réelles et distinctes r_1 et r_2, et les solutions de l'équation (**E**) sont les fonctions :
$$y(x) = \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$$ où α et β sont des constantes quelconques
- Si $\Delta < 0$, l'équation (E') a deux racines complexes conjugués z_1 et z_2, et si : $z_1 = p + qi$ alors les solutions de l'équation (**E**) sont les fonctions :
$$y(x) = e^{px}(\alpha \cos qx + \beta \sin qx)$$ où α et β sont des constantes quelconques
- Si $\Delta = 0$, l'équation (E') admet une racine double r_0, et les solutions de (**E**) sont les fonctions :
$$y(x) = (\alpha x + \beta)e^{r_0 x}$$ où α et β sont des constantes quelconques

Propriété 5 :

Soient x_0 et y_0 et z_0 trois réels.
L'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$ admet une unique solution f satisfaisant aux conditions initiales : $f(x_0) = y_0$ et $f'(x_0) = z_0$.

Exemple 1 :

1) Résoudre l'équation différentielle suivante : $(E) : y'' - 5y' + 6y = 0$

2) Déterminer la solution f de (E) qui vérifie : $f(0) = 2$ et $f'(0) = 1$

Solution :

1) L'équation caractéristique de (E) est : $r^2 - 5r + 6 = 0$

On a : $\Delta = 1$

Donc l'équation caractéristique a deux racines réelles et distinctes : $r_1 = 2$ et $r_2 = 3$.

Donc les solutions de l'équation (E) sont les fonctions :

$$y(x) = \alpha e^{2x} + \beta e^{3x} \text{ où } \alpha \text{ et } \beta \text{ sont des réels}$$

2) On a : $f(x) = \alpha e^{2x} + \beta e^{3x}$ Donc : $f'(x) = 2\alpha e^{2x} + 3\beta e^{3x}$

Or : $f(0) = 2$ et $f'(0) = 1$ Donc : $\alpha e^0 + \beta e^0 = 2$ et $2\alpha e^0 + 3\beta e^0 = 1$

Donc : $\alpha + \beta = 2$ et $2\alpha + 3\beta = 1$ Donc : $\alpha = 5$ et $\beta = -3$

Donc : la solution de l'équation (E) qui vérifie les conditions initiales est :

$$f(x) = 5e^{2x} - 3e^{3x}$$

Exemple 2 :

1) Résoudre l'équation différentielle suivante : $(E) : y'' + y' + \frac{5}{2}y = 0$

2) Déterminer la solution f de (E) qui vérifie : $f(0) = -2$ et $f'(0) = 6$

Solution :

1) L'équation caractéristique de (E) est : $r^2 + r + \frac{5}{2} = 0$

On a : $\Delta = -9$

Donc l'équation caractéristique a deux racines complexes conjugués :

$$z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i \text{ et } z_2 = \overline{z_1} = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$$

Donc les solutions de l'équation (E) sont les fonctions :

$$y(x) = e^{-\frac{1}{2}x}\left[\alpha \cos\left(\frac{3}{2}x\right) + \beta \sin\left(\frac{3}{2}x\right)\right] \text{ où } \alpha \text{ et } \beta \text{ sont des réels}$$

2) On a : $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x}\left[\alpha \cos\left(\frac{3}{2}x\right) + \beta \sin\left(\frac{3}{2}x\right)\right]$, donc :

$$f'(x) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}\left[\alpha \cos\left(\frac{3}{2}x\right) + \beta \sin\left(\frac{3}{2}x\right)\right] + \frac{3}{2}e^{-\frac{1}{2}x}\left[-\alpha \sin\left(\frac{3}{2}x\right) + \beta \cos\left(\frac{3}{2}x\right)\right]$$

Or : $\begin{cases} f(0) = -2 \\ f'(0) = 6 \end{cases}$ Donc : $\begin{cases} 1(\alpha\cos 0 + \beta \sin 0) = -2 \\ -\frac{1}{2}(\alpha\cos 0 + \beta \sin 0) + \frac{3}{2}(-\alpha \sin 0 + \beta\cos 0) = 6 \end{cases}$

Donc : $\begin{cases} \alpha = -2 \\ -\frac{1}{2}\alpha + \frac{3}{2}\beta = 6 \end{cases}$ On trouve : $\begin{cases} \alpha = -2 \\ \beta = \frac{10}{3} \end{cases}$

Donc : la solution de l'équation (E) qui vérifie les conditions initiales est :

$$f(x) = e^{-\frac{1}{2}x}\left[-2\cos\left(\frac{3}{2}x\right) + \frac{10}{3}\sin\left(\frac{3}{2}x\right)\right]$$

Cas particuliers :

L'équation différentielle	Solutions
$y'' + ay' = 0$	$y(x) = \alpha e^{-ax} + \beta$
$y'' + \omega^2 y = 0$	$y(x) = \alpha\cos(\omega x) + \beta\sin(\omega x)$
$y'' - \omega^2 y = 0$	$y(x) = \alpha e^{\omega x} + \beta e^{-\omega x}$

RÉSUMÉ :

Si l'équation caractéristique admet pour solutions :	Alors la forme générale des solutions de l'équation $y'' + ay' + by = 0$ est :
deux racines réelles distinctes r_1 et r_2	$y(x) = \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$
une racine réelle double r_0	$y(x) = (\alpha x + \beta)e^{r_0 x}$
deux racines complexes conjuguées $z_1 = p + qi$ et $z_2 = p - qi$	$y(x) = e^{px}[\alpha\cos(qx) + \beta\sin(qx)]$

Application 4 :

Déterminer la solution f de l'équation différentielle qui vérifie les conditions initiales données.

1. $(E_1) : y'' + 4y' + 4y = 0$ et $f(0) = 3$; $f'(0) = -1$
2. $(E_2) : y'' + 2y' + 5y = 0$ et $f(0) = 1$; $f'(0) = 0$
3. $(E_3) : y'' - 3y' + 2y = 0$ et $f(0) = 1$; $f'(0) = 1$
4. $(E_4) : y'' + 4y = 0$ et $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$; $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$