I. Equations et inéquations du premier degré à une inconnue :

1. Généralité :

Activité ①:

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

- $(E_1): \dfrac{3x+1}{2} = x - \dfrac{x-1}{2}$
- $(E_2): 2x+4 = 3(x-2) - x + 8$
- $(E_3): \sqrt{2}(x-3)+1 = 1-\sqrt{2}(3-x)$
- $(E_4): 4(x-1)^2 - 25 = 0$
- $(E_5): \dfrac{3x-1}{2x+3} = 0$
- $(E_6): |2x+3| = |x-2|$

2) Discuter selon les valeurs de m les solutions des équations suivantes :

- $(E_1): mx+5 = x-1$
- $(E_2): 2x+4m = 3(x-m)+8$

Activité ②

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

- $(E'_1): -4x+7 \le 2x+14$
- $(E'_2): 2(x-1)-(3x-5) \le 6x+7+4(x-3)$

2. Signe du binôme $ax+b$ $(a \neq 0)$:

Activité ③:

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

- $3x+4 \le 0$
- $3x+4 \ge 0$

2) Compléter le tableau suivant en utilisant "+" *ou* "–".

x	$-\infty$		$-\frac{4}{3}$		$+\infty$
$3x+4$		...	O	...	

Le tableau au-dessus est appelé ***tableau de signe*** du binôme $ax+b$.

3) Donner le tableau de signe de $-2x+6$.

Propriété :

Le tableau de signe de $ax+b$ est :

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$	signe contraire de a		O	signe de a	

Application①: Exercice ③ de la série.

On pose $p(x) = (2x-5)(-3x+4)$.

1) Poser le tableau de signe de $(-3x+4)$ et $(2x-5)$.

2) En déduire le signe de $p(x)$.

3) En déduire les solutions de l'inéquation $p(x) \le 0$.

Exercice ①: Exercice ④ de la série.

Résoudre dans IR les inéquations suivantes :

- $(E_1): 4x^2-25\geq 0$
- $(E_2): (4x-5)(2x+7)(1-x)^2>0$
- $(E_3): \dfrac{(3x-1)(x+2)}{2x+5}<0$

II. Equations et inéquations du second degré à une inconnue :

1. Généralité :

Activité ④:

1) a)-Vérifier que : $x^2-6x+5=(x-3)^2-4$

b)- En déduire les solutions de l'équation : $x^2-6x+5=0$.

L'écriture $(x-3)^2-4$ est appelée ***l'écriture canonique*** du polynôme x^2-6x+5.

2) Donner l'écriture canonique du polynôme x^2-x-2 puis résoudre l'équation $x^2-x-2=0$.

De façon générale :

Soit $p(x)=ax^2+bx+c$ un trinôme du second degré tels que a, b et c des réels et $a\neq 0$.

On a :

$$ax^2+bx+c=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right]$$
$$=a\left[(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{(2a)^2}\right]$$
$$=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{(2a)^2}\right]$$

Pour simplifier les calculs on pose : $\Delta=b^2-4ac$, on obtient :

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

Le nombre Δ est appelé ***le discriminant*** de ax^2+bx+c.

Propriété :

Pour Résoudre l'équation $(a\neq 0)$ $(E): ax^2+bx+c=0$ on calcule ***le discriminant*** $\Delta=b^2-4ac$. On a les cas suivants:

- Si $\Delta\prec 0$, alors l'équation (E) n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$ et on écrit: $S=\varnothing$.
- Si $\Delta=0$, alors l'équation (E) admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ qui est $-\dfrac{b}{2a}$ et on écrit: $S=\{-\dfrac{b}{2a}\}$.
- Si $\Delta\succ 0$, alors l'équation (E) admet deux solutions différentes $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $\mathbb{R}$ et on écrit: $S=\{\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a};\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\}$.

Application②:

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

- $(E_1): 2x^2+2x-12=0$
- $(E_2): 5x^2-4x+2=0$
- $(E_3): 3x^2-4x=0$
- $(E_4): 3x^2+4=0$
- $(E_5): x^2-2\sqrt{3}x+1=0$

Exercice ②: Exercice ⑥ de la série.

1) Résoudre dans IR l'équation $(E): 2x^2-2x-4=0$

2) En déduire les solutions des équations suivantes :

- $(E'): 2x^4 - 2x^2 - 4 = 0$
- $(E''): 2x^2 - 2|x| - 4 = 0$
- $(E'''): 2x - 2\sqrt{x} - 4 = 0$

2. Factorisation d'un trinôme du second degré

Propriété:

Soit $p(x) = ax^2 + bx + c$ un trinôme du second degré tels que a, b et c des réels et $a \neq 0$ et soit Δ son discriminant. On a les cas suivants:

- Si $\Delta \prec 0$, alors le polynôme $p(x)$ n'admet pas de factorisation dans $\mathbb{R}$.
- Si $\Delta = 0$, alors : $p(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$.
- Si $\Delta \succ 0$, alors : $p(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ tels que : $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Application③:

Factoriser, si possible, les polynômes suivants :

- $P_1(x) = 2x^2 + 2x - 12$
- $P_2(x) = 5x^2 - 4x + 2$
- $P_3(x) = 3x^2 - 4x$
- $P_4(x) = 3x^2 + 4$
- $P_5(x) = x^2 - 2\sqrt{3}x + 1$

Exercice ③: Exercice ⑧ de la série.

1) Factoriser les polynômes $x^2 - x - 6$ et $2x^2 + 3x - 2$.

2) Résoudre l'equation: $(E_1): \frac{2}{x^2 - x - 6} + \frac{x}{2x^2 + 3x - 2} = 0$

Propriété :

Si l'équation $(a \neq 0)$ $(E): ax^2 + bx + c = 0$ admet deux solutions x_1 et x_2, alors :

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ et } x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}.$$

Application④:

1) Sachant que 1 et une solution de $2018x^2 - x - 2017$, trouver la deuxième solution.

2) Résoudre le système suivant: $\begin{cases} x + y = 13 \\ xy = 12 \end{cases}$.

3. Signe d'un trinôme du second degré

Propriété :

Soit $p(x) = ax^2 + bx + c$ un trinôme du second degré tels que a, b et c des réels et $a \neq 0$ et soit Δ son discriminant. On a les cas suivants:

- Si $\Delta \prec 0$, alors le tableau de signe de $p(x)$ est :

x	$-\infty$	$+\infty$
$p(x)$	*signe de a*	

- Si $\Delta = 0$, alors alors le tableau de signe de $p(x)$ est :

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$p(x)$	*signe de a*	O	*signe de a*

- Si $\Delta \succ 0$,alors le tableau de signe de $p(x)$ est: (On suppose que: $x_1 \prec x_2$)

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$p(x)$	*signe de a*	O *signe contraire de a*	O	*signe de a*

✍ Application⑤:

1) Donner le tableau de signe de polynômes suivants :

- $P_1(x)=2x^2+2x-12$
- $P_2(x)=5x^2-4x+2$
- $P_3(x)=3x^2-4x$
- $P_4(x)=3x^2+4$
- $P_5(x)=x^2-2\sqrt{3}x+1$

2) En déduire les solutions des inéquations suivantes :

- $P_1(x)\geq 0$
- $P_3(x)\leq 0$
- $P_4(x)\prec 0$
- $\frac{P_3(x)}{P_1(x)}\geq 0$

3) Ecrire, sans le symbole de la valeur absolue, l'expression $A(x)=|P_1(x)|+|P_3(x)|$.

III. Equations, inéquations et systèmes du premier degré à deux inconnues:

1. Equations du premier degré à deux inconnues :

✍✍ Définitions :

- $\mathbb{R}^2$ est l'ensemble des couples (x,y) tels que $x\in\mathbb{R}$ *et* $y\in\mathbb{R}$.
- Toute équation peut être écrite sous la forme : $ax+by+c=0$ tels que a, b *et* c des réels et $(a,b)\neq(0,0)$ est appelée ***une équation du premier degré à deux inconnues***.
- Le couple (x_0,y_0) est une solution de l'équation: $ax+by+c=0$ si $ax_0+by_0+c=0$

✍ Application⑥:

1) Parmi les couples $(1;2),(0;3),(3;0)$ *et* $(1;\frac{9}{2})$, déterminer ceux qui vérifient l'équation $3x-2y+6=0$.

2) Déterminer le nombre a pour que le couple $(2a-1,a)$ soit une solution de $2x-y+3=0$.

3) Résoudre dans IR^2 les équations suivantes :

- $(E_1): 2x-3y+3=0$
- $(E_2): x-4y=8+5x$

2. Systèmes du premier degré à deux inconnues :

✍ Activité ⑤:

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant : $(S):\begin{cases}3x+y=8\\2x-y=2\end{cases}$.

✍✍ Définition et propriété :

On considère le système : $(S):\begin{cases}ax+by=c\\a'x+b'y=c'\end{cases}$ tels que a, b, c, a', b' *et* c' des réels.

- Le nombre $D=\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$ est appelé le déterminant du système (S).
- Si $D\neq 0$, alors le système (S) admet une unique solution dans $\mathbb{R}^2$: (x_0,y_0) tels que : $x_0=\dfrac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{D}$ et $y_0=\dfrac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{D}$.
- Si $D\neq 0$, alors le système (S) :
  - Soit admet une infinité de solutions dans $\mathbb{R}^2$ $\left(D_x=\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}=0 \text{ et } D_y=\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}=0\right)$.
  - Ou bien n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}^2$ $\left(D_x=\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}\neq 0 \text{ ou } D_y=\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}\neq 0\right)$.

✍ *Application⑦: Exercice ①⑤ de la série.*

1) Résoudre dans IR^2 les systèmes :

- $(S_1):\begin{cases} 5x-2y=1 \\ -10x+4y=3 \end{cases}$
- $(S_2):\begin{cases} 3x+y=7 \\ 2x-y=8 \end{cases}$

2) a)-Résoudre dans IR^2 le système: $\begin{cases} -x+3y=4 \\ x-2y=11 \end{cases}$

b)-En déduire les solutions des systèmes :

- $(S_1):\begin{cases} -\sqrt{x}+\dfrac{3}{y}=4 \\ \sqrt{x}-\dfrac{2}{y}=11 \end{cases}$
- $(S_2):\begin{cases} -|x+1|+3y^2=4 \\ |x+1|-2y^2=11 \end{cases}$

3. Régionnement du plan :

✍ *Activité ⑥:*

On considère la droite (D) d'équation : $3x-2y+1=0$.

1) Construire la droite (D) dans un repère orthonormé.

2) Parmi les couples $(0;0),(0;-3),(0;1)$, déterminer ceux qui vérifient l'inéquation $3x-2y+1\geq 0$.

3) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ l'inéquation $(E'):3x-2y+1\geq 0$.

✍ *Application⑧:*

1) Résoudre dans IR^2 les inéquations :

- $(E_1):x+2y-2\prec 0$
- $(E_2):2x+y+2\geq 0$

2) En déduire les solutions du système : $(S):\begin{cases} x+2y-2\prec 0 \\ 2x+y+2\geq 0 \end{cases}$