Cours 3 : Etude de fonctions

I- Etude des branches infinies (Rappel) 1

1) L'asymptote horizontale – L'asymptote verticale 1

2) L'asymptote oblique 2

3) Les branches paraboliques 2

II- Etude de la concavité d'une courbe 4

III- Axe de symétrie – Centre de symétrie 5

Etude de fonctions

I) Etude des branches infinies (Rappel)

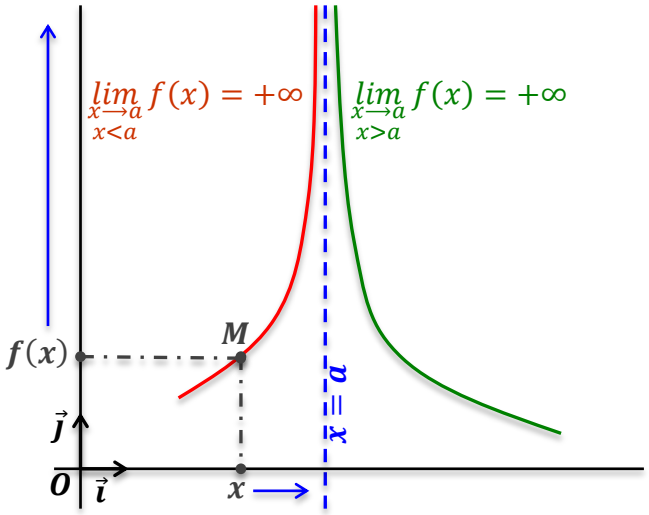
Dans tout ce qui suit f est une fonction numérique de la variable réelle x, et $(\mathcal{C}_f)$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

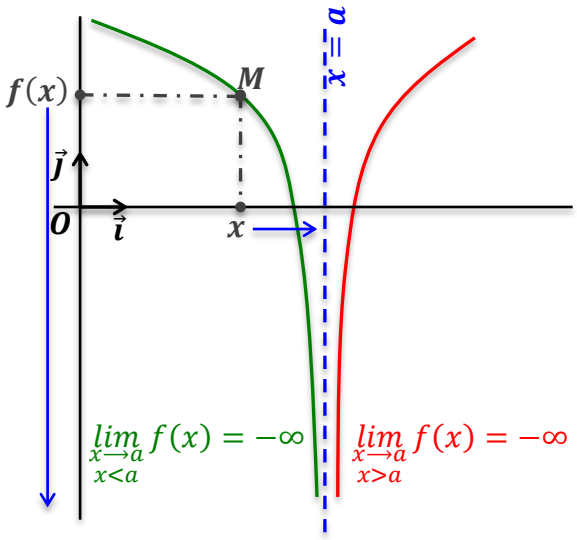
1) L'asymptote horizontale – L'asymptote verticale :

Définition 1 :

On dit que la droite d'équation $x = a$ est une ***asymptote verticale*** de $(\mathcal{C}_f)$ si :

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty \quad ou \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty \quad ou \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty \quad ou \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$$

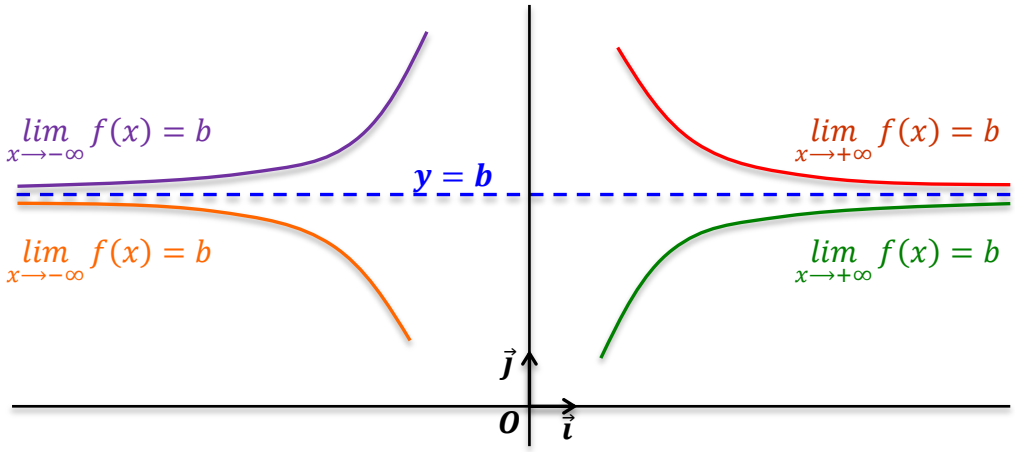




Définition 2 :

On dit que la droite d'équation $y = b$ est une ***asymptote horizontale*** de $(\mathcal{C}_f)$ si :

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = b \quad ou \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = b$$



2) L'asymptote oblique :

Définition 3 :

On dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est une ***asymptote oblique*** de $(\mathcal{C}_f)$ si :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - (ax+b) = 0 \quad ou \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) - (ax+b) = 0$$

Propriété :

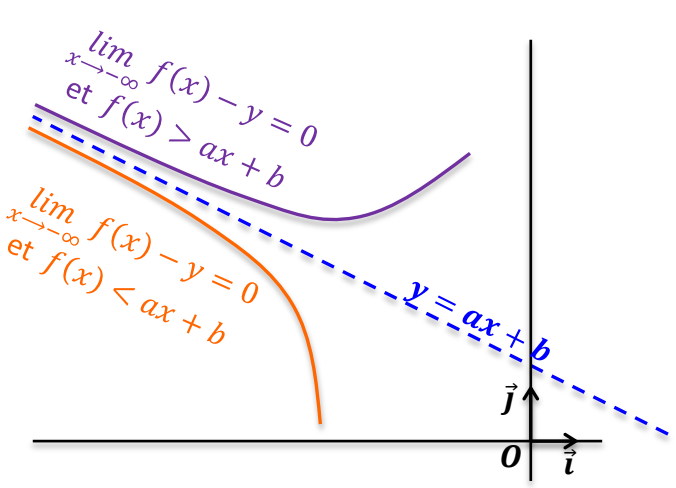
La droite d'équation $y = ax + b$ est une ***asymptote oblique*** de $(\mathcal{C}_f)$ si :

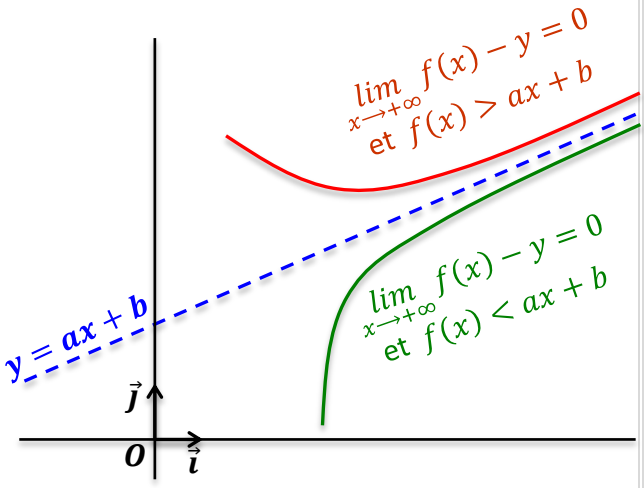
$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a \ \ (a \neq 0) \\ \text{et} \ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - ax = b \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a \ \ (a \neq 0) \\ \text{et} \ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - ax = b \end{cases}$$

Remarque :

Si la courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet la droite $(\Delta) : y = ax + b$ comme asymptote oblique, alors la **position** de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ se déduit par le signe de : $f(x) - (ax + b)$.

- Si $f(x) - (ax + b) > 0$ alors $(\mathcal{C}_f)$ est au-dessus de (Δ).
- Si $f(x) - (ax + b) < 0$ alors $(\mathcal{C}_f)$ est au-dessous de (Δ).
- Si $f(x) - (ax + b) = 0$ alors $(\mathcal{C}_f)$ coupe (Δ).





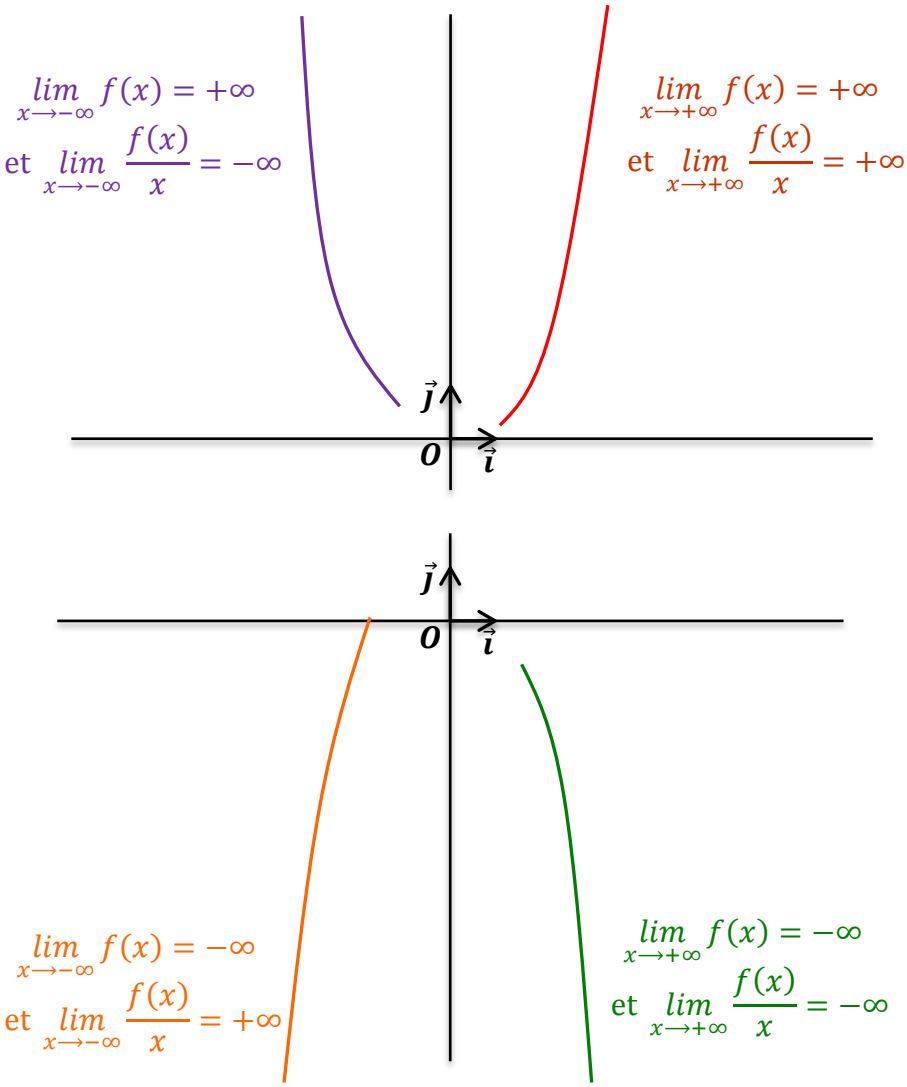
3) Les branches paraboliques :

Définition 4 :

Soit f une fonction numérique d'une variable réelle telle que : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$

On dit que $(\mathcal{C}_f)$ admet une ***branche parabolique dirigée vers l'axe des ordonnées*** si :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty \quad ou \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$$

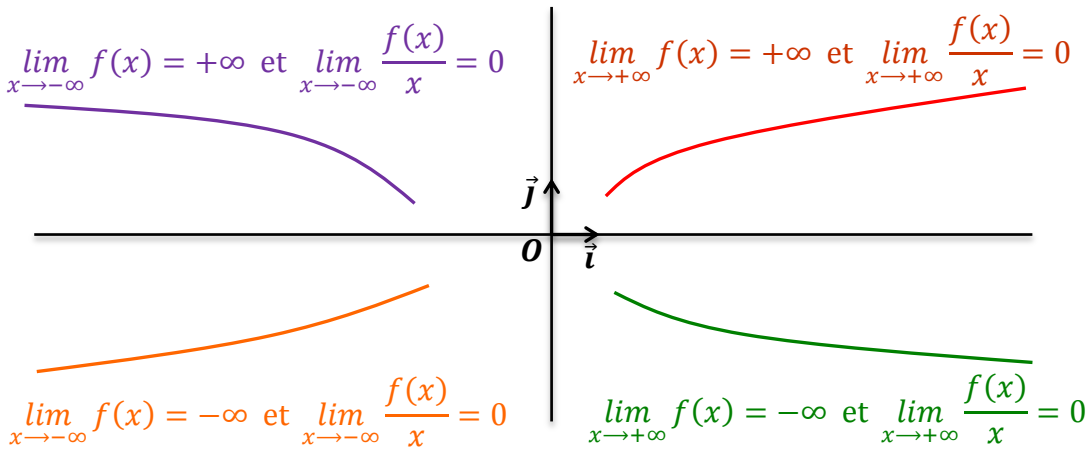


Définition 5 :

Soit f une fonction numérique d'une variable réelle telle que : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$

On dit que $(\mathcal{C}_f)$ admet une ***branche parabolique dirigée vers l'axe des abscisses*** si :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

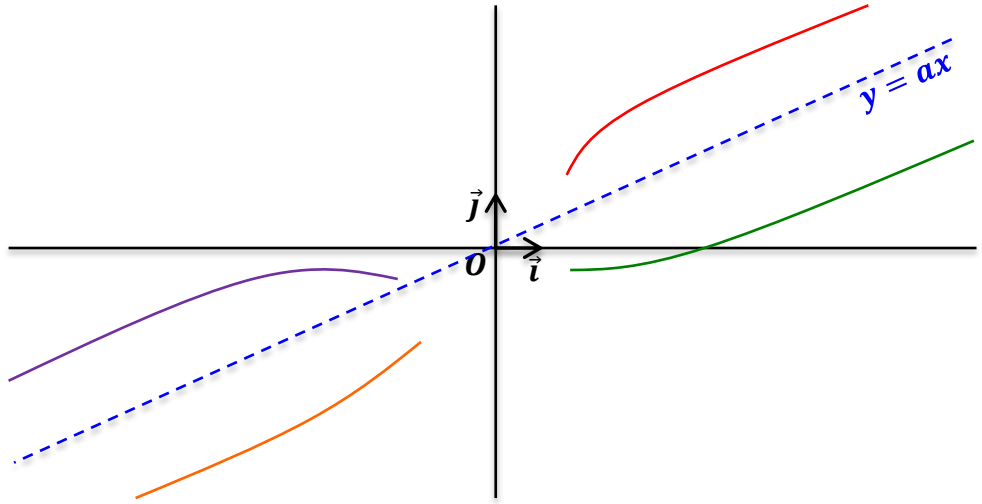


Définition 6 :

Soit f une fonction numérique d'une variable réelle telle que : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$

On dit que $(\mathcal{C}_f)$ admet une ***branche parabolique de direction la droite d'équation*** $y = ax$ si :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a \quad (a \neq 0) \\ \text{et} \quad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - ax = \pm\infty \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a \quad (a \neq 0) \\ \text{et} \quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - ax = \pm\infty \end{cases}$$



Exercice 1 :

Etudiez la nature des branches infinies des graphes des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{3-2x^2}{(x-1)^2} \quad \text{et} \quad g(x) = 2x - \sqrt{x}$$

II) Etude de la concavité d'une courbe :

Définition 7 :

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.

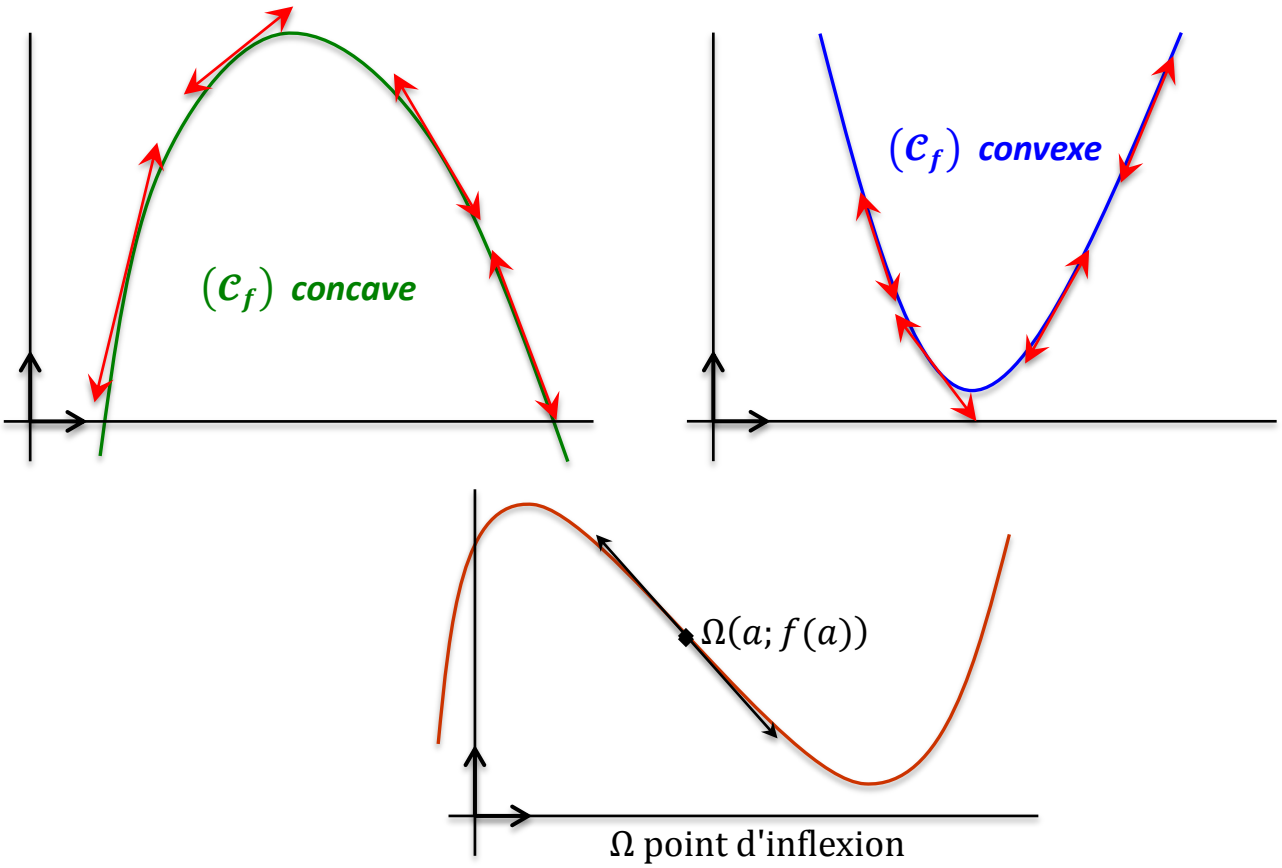
- Pour que la courbe $(\mathcal{C}_f)$ soit ***concave*** sur I, il faut et il suffit que :

$$(\forall\, x \in I) : f''(x) \leq 0$$

- Pour que la courbe $(\mathcal{C}_f)$ soit ***convexe*** sur I, il faut et il suffit que :

$$(\forall\, x \in I) : f''(x) \geq 0$$

- Pour que le point $\Omega(a; f(a))$ soit un ***point d'inflexion*** de la courbe $(\mathcal{C}_f)$, il faut et il suffit que la dérivée seconde f'' s'annule en a , et change de signe de part et d'autre de a.



Exercice 2 :

Étudiez la concavité de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ sachant que : $f(x) = x^3 + x^2$.

III) Axe de symétrie – Centre de symétrie :

Proposition :

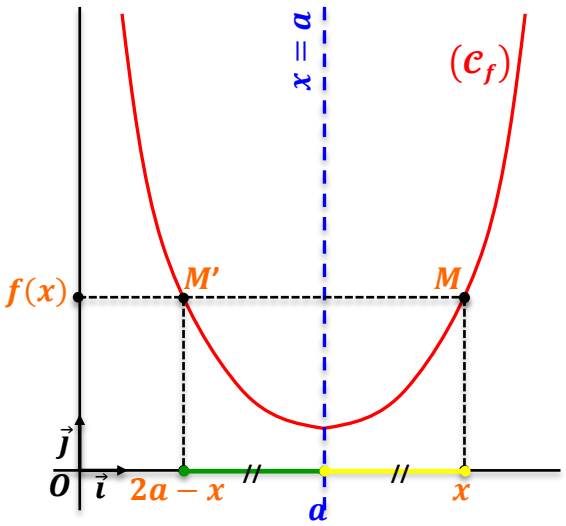
Soit f une fonction et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

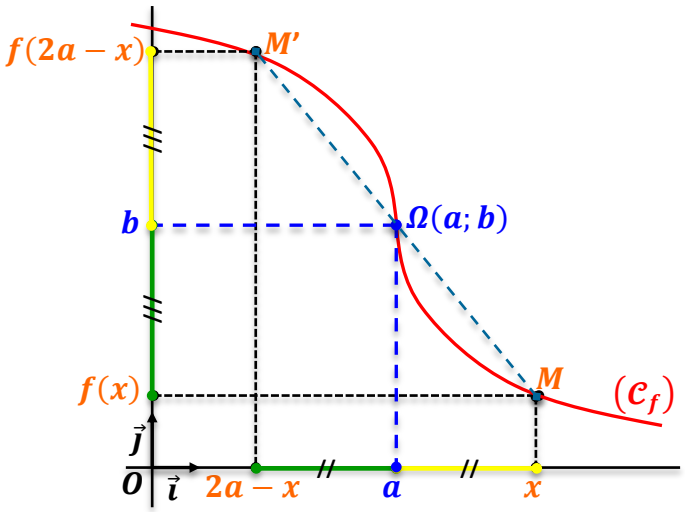
- Pour que la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $x = a$ soit un ***axe de symétrie*** de la courbe $(\mathcal{C}_f)$, il faut et il suffit que pour tout $x \in \mathcal{D}_f$:

$$(2a - x) \in \mathcal{D}_f \quad \text{et} \quad f(2a - x) = f(x)$$

- Pour que le point $\Omega(a, b)$ soit un ***centre de symétrie*** de la courbe $(\mathcal{C}_f)$, il faut et il suffit que pour tout $x \in \mathcal{D}_f$:

$$(2a - x) \in \mathcal{D}_f \quad \text{et} \quad f(2a - x) = 2b - f(x)$$





Exercice 3 :

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{x^2 + 6x + 5}$.

Montrez que la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $x = -3$ est un axe de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$.

Exercice 4 :

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{3x-1}{x+2}$.

Montrez que $\Omega(-2,3)$ est un point de symétrie de la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

Solution des exercices :

Exercice 1 :

★ ▪ On a : $x \in D_f \Leftrightarrow (x-1)^2 \neq 0 \Leftrightarrow x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$

D'où : $\mathcal{D}_f =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$.

▪ On a : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{3-2x^2}{(x-1)^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-2x^2}{x^2} = -2$

et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{3-2x^2}{(x-1)^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x^2}{x^2} = -2$

Donc la droite d'équation $y = -2$ est une asymptote horizontale à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $-\infty$ et $+\infty$.

▪ On a : $\lim_{x\to-1^+} f(x) = \lim_{x\to-1^+} \frac{3-2x^2}{(x-1)^2} = +\infty$

et $\lim_{x\to-1^-} f(x) = \lim_{x\to-1^-} \frac{3-2x^2}{(x-1)^2} = +\infty$

Donc la droite d'équation $x = 1$ est une asymptote verticale de la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

★★ On a : $x \in D_f \Leftrightarrow x \geq 0$

D'où : $\mathcal{D}_f = [0, +\infty[$.

▪ On a : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 2x - \sqrt{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}(2\sqrt{x} - 1) = +\infty$

et $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$: $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x-\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(2 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = 2$

et $\lim_{x\to+\infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x\to+\infty} \left(2x - \sqrt{x} - 2x\right) = \lim_{x\to+\infty} -\sqrt{x} = -\infty$

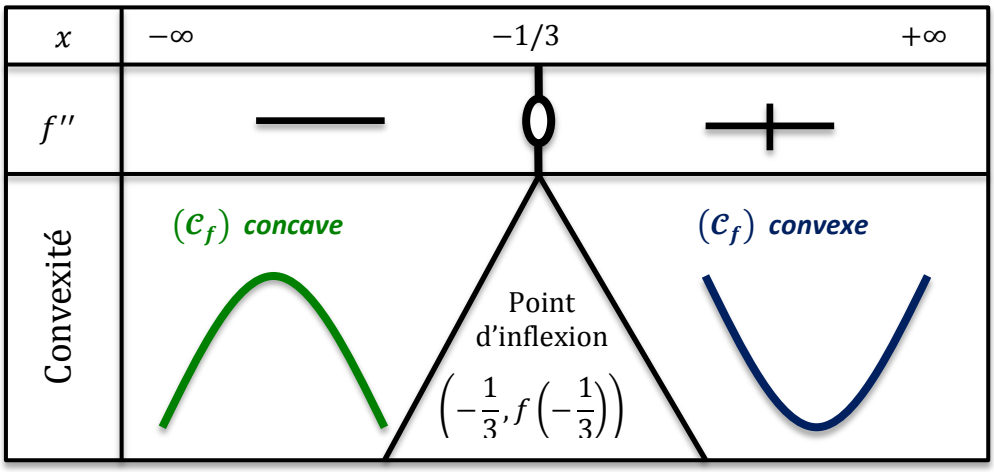
Donc la courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction la droite d'équation : $y = 2x$.

Exercice 2 :

On a : $f'(x) = 3x^2 + 2x$ et $f''(x) = 6x + 2$

et $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$

D'où le tableau de convexité de la fonction f est :



La courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet un point d'inflexion au point $\Omega\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{27}\right)$.

Exercice 3 :

En résolvant l'équation : $x^2+6x+5=0$, on trouve : $x=-5$ ou $x=-1$.

On dresse le tableau de signes de : x^2+6x+5

x	$-\infty$		-5		-1		$+\infty$
x^2+6x+5		$+$	0	$-$	0	$+$	

Le domaine de définition de f est : $\mathcal{D}_f=]-\infty;-5]\cup[-1;+\infty[$.

On a d'une part : $x\in\mathcal{D}_f \Leftrightarrow (x\leq -5 \ ou \ x\geq -1)$

$\Leftrightarrow (-6-x\geq -1 \ ou \ -6-x\leq -5) \Leftrightarrow (-6-x)\in\mathcal{D}_f$

D'autre part, pour tout $x\in\mathcal{D}_f$, on a :

$$f(-6-x)=\sqrt{(-6-x)^2+6(-6-x)+5}=\sqrt{36+12x+x^2-36-6x+5}=f(x)$$

Par suite, la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $x=-3$ est un axe de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$.

Exercice 4 :

Le domaine de définition de f est : $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}-\{-2\}$

On a : $x\in D_f \Leftrightarrow x\neq -2 \Leftrightarrow -x\neq 2 \Leftrightarrow -4-x\neq -2 \Leftrightarrow (-4-x)\in D_f$

et $f(-4-x)=\frac{-12-3x-1}{-4-x+2}=\frac{3x+13}{x+2}=\frac{6(x+2)}{x+2}-\frac{3x-1}{x+2}=6-f(x)$

Par conséquent, le point $\Omega(-2,3)$ est un centre de symétrie de la courbe $(\mathcal{C}_f)$.