Prof. Taher Bouyguir

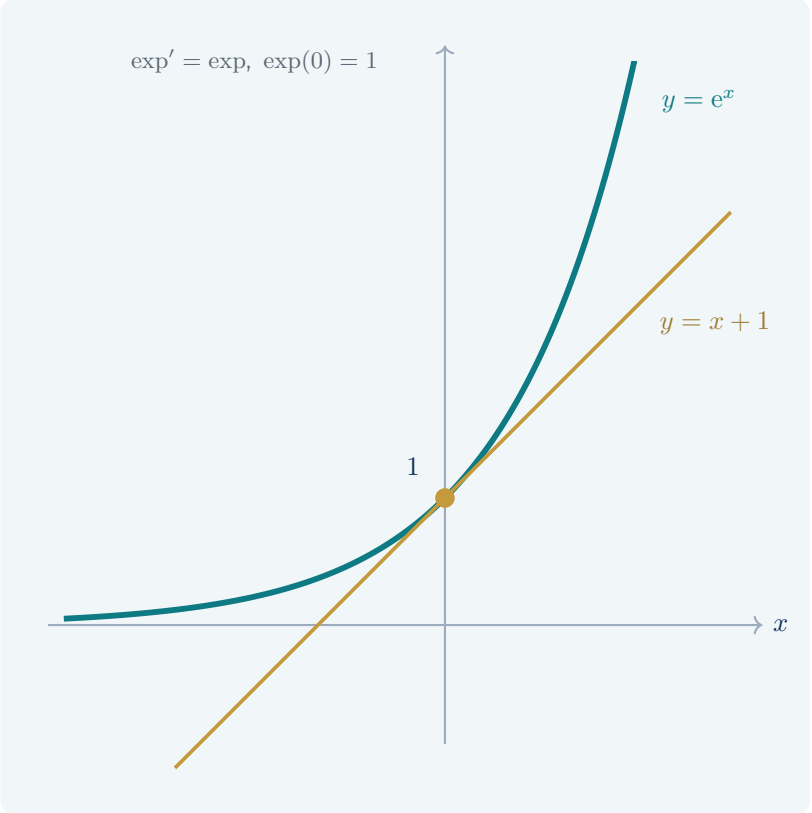
Professeur de mathématiques
Secondaire qualifiant

Prof Taher
Prof Taher Bouyguir
Taher Bouyguir
Contact WhatsApp
Telegram
mr.bouyguir@gmail.com
www.proftaher.com

1ère Spé Maths

CHAPITRE 12

Fonction exponentielle



Cours et corrigés des applications

12

Cours

Fonction exponentielle

Capacités attendues

- Transformer une expression en utilisant les propriétés de la fonction exponentielle.
- Résoudre des équations et des inéquations avec la fonction exponentielle.
- Pour a réel, savoir dériver la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}$.
- Représenter graphiquement la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{kx}$, où k est un réel non nul.
- Modéliser une situation par une croissance ou une décroissance exponentielle.
- Étudier une fonction comportant une exponentielle.

Prérequis : dérivation (Chap 4 et 8), notamment $\big(g(ax+b)\big)' = a\,g'(ax+b)$, dérivée d'un produit et d'un quotient ; puissances ; suites géométriques (Chap 11).

Table des matières

I Définition de la fonction exponentielle . . . 3
II Propriétés algébriques . . . 3
III Dérivée, variations et courbe . . . 4
1 Variations de la fonction exponentielle . . . 4
2 Dérivée de $x \mapsto \mathrm{e}^{ax+b}$ . . . 5
3 Les fonctions $x \mapsto \mathrm{e}^{kx}$ . . . 6
IV Équations et inéquations . . . 7
V Croissance et décroissance exponentielles . . . 8
VI Étude d'une fonction comportant une exponentielle . . . 9
Corrigés des applications . . . 12

I Définition de la fonction exponentielle

Théorème : définition *(admis)*

Il existe une **unique** fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$. Cette fonction est appelée **fonction exponentielle** et notée $\exp$.

Propriété 1 : l'exponentielle ne s'annule pas

Pour tout réel x : $\exp(x) \times \exp(-x) = 1$. En particulier, $\exp(x) \neq 0$ et $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$.

Démonstration

Soit $g(x) = \exp(x)\exp(-x)$. Avec la dérivée d'un produit et $\big(\exp(-x)\big)' = -\exp(-x)$: $g'(x) = \exp(x)\exp(-x) - \exp(x)\exp(-x) = 0$. Donc g est constante, égale à $g(0) = 1 \times 1 = 1$. □

Définition 1 : le nombre e et la notation e^x

On note $\mathrm{e} = \exp(1) \approx 2{,}718$. Pour tout réel x, on note $\exp(x) = \mathrm{e}^x$. On a ainsi $\mathrm{e}^0 = 1$ et $\mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$.

Remarque

Cette notation est justifiée par les propriétés de la partie II, identiques à celles des puissances. À la calculatrice, on utilise la touche e^x (ou exp).

II Propriétés algébriques

Propriété 2 : relations fonctionnelles *(admis)*

Pour tous réels a et b et tout entier relatif n :

$$\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a \times \mathrm{e}^b \qquad \mathrm{e}^{-a} = \frac{1}{\mathrm{e}^a} \qquad \mathrm{e}^{a-b} = \frac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b} \qquad (\mathrm{e}^a)^n = \mathrm{e}^{na}.$$

Conséquences

Pour tout réel a, la suite (e^{na}) est **géométrique** de raison e^a, car $\mathrm{e}^{(n+1)a} = \mathrm{e}^{na} \times \mathrm{e}^a$.

Exemple

- $A = \mathrm{e}^3 \times \mathrm{e}^{-5} = \mathrm{e}^{3-5} = \mathrm{e}^{-2}$.
- $B = \dfrac{\left(\mathrm{e}^{2x}\right)^3}{\mathrm{e}^{x-1}} = \dfrac{\mathrm{e}^{6x}}{\mathrm{e}^{x-1}} = \mathrm{e}^{6x-(x-1)} = \mathrm{e}^{5x+1}$.
- $C = \left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right)^2 = \mathrm{e}^{2x} + 2\,\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-2x} = \mathrm{e}^{2x} + 2 + \mathrm{e}^{-2x}$.

Application 1

Simplifier :

$$A = \mathrm{e}^{2x+1} \times \mathrm{e}^{-x} \quad ; \quad B = \frac{\mathrm{e}^{3x}}{\mathrm{e}^{x+2}} \quad ; \quad C = \left(\mathrm{e}^{-x}\right)^2 \times \mathrm{e}^{3x} \quad ; \quad D = \frac{\mathrm{e}^5 \times \mathrm{e}^{-2}}{\mathrm{e}}$$

Puis montrer que, pour tout réel x, $\dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x + 1} = \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-x}}{1 + \mathrm{e}^{-x}}$.

Ma réponse :

III Dérivée, variations et courbe

1 Variations de la fonction exponentielle

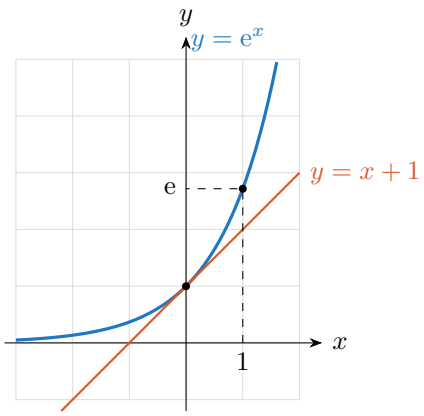
Propriété 3

- Pour tout réel x : $\mathrm{e}^x > 0$.
- La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$, $\exp' = \exp$, et elle est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

Démonstration

$\exp$ ne s'annule pas et $\exp(0) = 1 > 0$. Si $\exp$ prenait une valeur négative, comme elle est dérivable (donc « sans saut »), elle devrait s'annuler entre les deux : impossible. Donc $\mathrm{e}^x > 0$. Comme $\exp' = \exp > 0$, la fonction est strictement croissante. □

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$\exp'(x)$		$+$		$+$		$+$	
$\exp(x)$		↗	1	↗	e	↗	



Conséquences

Pour tous réels a et b : $\mathrm{e}^a = \mathrm{e}^b \iff a = b$ et $\mathrm{e}^a < \mathrm{e}^b \iff a < b$.
En particulier : $\mathrm{e}^x > 1 \iff x > 0$ et $0 < \mathrm{e}^x < 1 \iff x < 0$. La tangente à la courbe au point d'abscisse 0 a pour équation $y = \mathrm{e}^0(x - 0) + \mathrm{e}^0$, soit $y = x + 1$.

2 Dérivée de $x \mapsto \mathrm{e}^{ax+b}$

Propriété 4

Pour tous réels a et b, la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{ax+b}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\boxed{\left(\mathrm{e}^{ax+b}\right)' = a\,\mathrm{e}^{ax+b}}$$

En particulier, $(\mathrm{e}^{ax})' = a\,\mathrm{e}^{ax}$.

Démonstration

C'est la formule $\big(g(ax+b)\big)' = a\,g'(ax+b)$ du Chap 4, avec $g = \exp$ et $g' = \exp$. □

Exemple

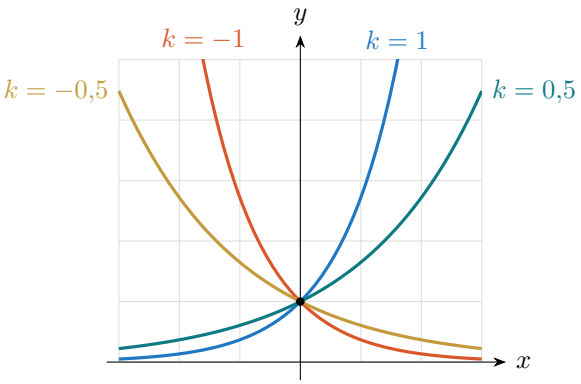
- $f(x) = 3\mathrm{e}^{2x}$: $f'(x) = 6\mathrm{e}^{2x}$;
- $g(x) = \mathrm{e}^{-0,5x}$: $g'(x) = -0,5\,\mathrm{e}^{-0,5x}$;
- $h(x) = x\,\mathrm{e}^x$: $h'(x) = 1 \times \mathrm{e}^x + x\,\mathrm{e}^x = (x+1)\mathrm{e}^x$.

3 Les fonctions $x \mapsto \mathrm{e}^{kx}$

Propriété 5

Soit k un réel non nul et $f_k(x) = \mathrm{e}^{kx}$. Alors $f_k'(x) = k\,\mathrm{e}^{kx}$, du signe de k :

- si $k > 0$, f_k est strictement croissante ; si $k < 0$, f_k est strictement décroissante.
- Toutes les courbes passent par le point $(0\,;1)$. Plus $|k|$ est grand, plus la croissance (ou décroissance) est rapide.



Application 2

Dériver les fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}$:

$$f(x) = 5\mathrm{e}^{-3x} \quad ; \quad g(x) = x^2 + \mathrm{e}^{4x} \quad ; \quad h(x) = (2x-1)\mathrm{e}^{x} \quad ; \quad k(x) = \frac{\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x}+1}.$$

Ma réponse :

IV Équations et inéquations

Méthode : résoudre avec l'exponentielle

- Écrire chaque membre sous la forme $\mathrm{e}^{\cdots}$, puis utiliser $\mathrm{e}^A = \mathrm{e}^B \iff A = B$ et $\mathrm{e}^A < \mathrm{e}^B \iff A < B$.
- Si un facteur $\mathrm{e}^{\cdots}$ apparaît dans un produit, se souvenir qu'il est **strictement positif** : il ne change pas le signe.

Exemple

- $\mathrm{e}^{2x-1} = \mathrm{e}^{x+3} \iff 2x-1 = x+3 \iff x = 4$.
- $\mathrm{e}^{x^2} = \mathrm{e} \iff x^2 = 1 \iff x = -1$ ou $x = 1$.
- $\mathrm{e}^{3x} \leqslant \mathrm{e}^{x+4} \iff 3x \leqslant x+4 \iff x \leqslant 2$: $S =]-\infty\,;2]$.
- $\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x = 0 \iff \mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x - 1) = 0 \iff \mathrm{e}^x = 1$ (car $\mathrm{e}^x \neq 0$) $\iff x = 0$.
- $(x-2)\mathrm{e}^x > 0 \iff x - 2 > 0$ (car $\mathrm{e}^x > 0$) $\iff x > 2$.

Application 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $\mathrm{e}^{3x+1} = \mathrm{e}^{-x+5}$;
2. $\mathrm{e}^{x^2-4} = 1$;
3. $\mathrm{e}^{-2x} > \mathrm{e}^{x-6}$;
4. $(x+3)\mathrm{e}^x \leqslant 0$;
5. $\mathrm{e}^{2x} = \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^3$.

Ma réponse :

V Croissance et décroissance exponentielles

Propriété 6 : modèle exponentiel

Une grandeur qui, sur des durées égales, est multipliée par un même coefficient suit une **évolution exponentielle**. On la modélise par $f(t) = C\,\mathrm{e}^{kt}$ $(C > 0)$: **croissance** exponentielle si $k > 0$, **décroissance** exponentielle si $k < 0$. Pour tout entier n, $f(n) = C \times (\mathrm{e}^k)^n$: les valeurs aux instants entiers forment une suite géométrique de raison e^k.

Exemple : des bactéries

Le nombre de bactéries dans une culture après t heures est $N(t) = 500\,\mathrm{e}^{0{,}2t}$.

- $N'(t) = 100\,\mathrm{e}^{0{,}2t} > 0$: la population augmente.
- $N(5) = 500\,\mathrm{e}^{1} = 500\mathrm{e} \approx 1\,359$ bactéries.
- Chaque heure, le nombre est multiplié par $\mathrm{e}^{0{,}2} \approx 1{,}221$, soit une hausse d'environ $22{,}1\,\%$ par heure.
- À la calculatrice (tableau de valeurs), $N(t) \geqslant 1000$ dès $t \approx 3{,}5$ h : la population double en environ 3 h 30.

Application 4

Un médicament est injecté ; sa concentration dans le sang (en mg/L) après t heures est $C(t) = 20\,\mathrm{e}^{-0{,}3t}$.

1. Calculer $C(0)$ et $C(2)$ (au centième).
2. Étudier le sens de variation de C sur $[0\,;+\infty[$.
3. Par quel coefficient la concentration est-elle multipliée chaque heure ? Quel pourcentage de baisse cela représente-t-il ?
4. À la calculatrice, déterminer au bout de combien d'heures entières la concentration devient inférieure à 5 mg/L.

Ma réponse :

VI Étude d'une fonction comportant une exponentielle

Exemple

Soit $f(x) = (x-1)\mathrm{e}^x$ sur $\mathbb{R}$. Avec la dérivée d'un produit : $f'(x) = 1 \times \mathrm{e}^x + (x-1)\mathrm{e}^x = x\,\mathrm{e}^x$. Comme $\mathrm{e}^x > 0$, $f'(x)$ a le signe de x. $f(0) = -1$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	-1	↗	

f admet un minimum égal à -1 en 0. La tangente au point d'abscisse 1 : $f(1) = 0$, $f'(1) = \mathrm{e}$, donc $y = \mathrm{e}(x-1)$.

Application 5

Soit $f(x) = (2-x)\mathrm{e}^x$ sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $f'(x) = (1-x)\mathrm{e}^x$ et dresser le tableau de variation de f.
2. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.

Ma réponse :

Application 6

Soit $g(x) = \mathrm{e}^x - x - 1$ sur $\mathbb{R}$.

1. Étudier les variations de g.
2. En déduire que, pour tout réel x, $\mathrm{e}^x \geqslant x + 1$. Interpréter graphiquement.

Ma réponse :

Application 7

(Synthèse) Soit $f(x) = x\,\mathrm{e}^{-x}$ sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $f'(x) = (1-x)\mathrm{e}^{-x}$ et dresser le tableau de variation de f. Préciser son maximum.
2. Déterminer la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.
3. Étudier le signe de $f(x) - x = x\,(\mathrm{e}^{-x} - 1)$ et en déduire la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à T.

Ma réponse :

Corrigés des applications

Corrigé de l'application 1

$A = \mathrm{e}^{2x+1-x} = \mathrm{e}^{x+1}$; $B = \mathrm{e}^{3x-x-2} = \mathrm{e}^{2x-2}$; $C = \mathrm{e}^{-2x} \times \mathrm{e}^{3x} = \mathrm{e}^{x}$; $D = \mathrm{e}^{5-2-1} = \mathrm{e}^{2}$.

On multiplie le numérateur et le dénominateur de $\dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x + 1}$ par e^{-x} : $\dfrac{\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x}} = \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-x}}{1 + \mathrm{e}^{-x}}$.

Corrigé de l'application 2

$f'(x) = 5 \times (-3)\mathrm{e}^{-3x} = -15\mathrm{e}^{-3x}$; $g'(x) = 2x + 4\mathrm{e}^{4x}$; $h'(x) = 2\mathrm{e}^x + (2x-1)\mathrm{e}^x = (2x+1)\mathrm{e}^x$;

$k'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x + 1) - \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x + 1)^2} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x + 1)^2}$.

Corrigé de l'application 3

1. $3x + 1 = -x + 5 \iff x = 1$.
2. $\mathrm{e}^{x^2-4} = \mathrm{e}^0 \iff x^2 = 4 \iff x = -2$ ou $x = 2$.
3. $-2x > x - 6 \iff -3x > -6 \iff x < 2 : S =]-\infty\,;2[$.
4. $\mathrm{e}^x > 0$ donc $x + 3 \leqslant 0 : S =]-\infty\,;-3]$.
5. $\mathrm{e}^{2x} = \mathrm{e}^{x+3} \iff 2x = x + 3 \iff x = 3$.

Corrigé de l'application 4

1. $C(0) = 20$ mg/L ; $C(2) = 20\,\mathrm{e}^{-0,6} \approx 10{,}98$ mg/L.
2. $C'(t) = -6\,\mathrm{e}^{-0,3t} < 0$: C est strictement décroissante.
3. $C(t+1) = C(t) \times \mathrm{e}^{-0,3}$ et $\mathrm{e}^{-0,3} \approx 0{,}741$: baisse d'environ $25{,}9\,\%$ par heure.
4. $C(4) \approx 6{,}02$ et $C(5) \approx 4{,}46$: au bout de 5 heures.

Corrigé de l'application 5

1. $f'(x) = -\mathrm{e}^x + (2-x)\mathrm{e}^x = (1-x)\mathrm{e}^x$, du signe de $1 - x$: f croît sur $]-\infty\,;1]$, décroît sur $[1\,;+\infty[$; maximum $f(1) = \mathrm{e}$.
2. $f(0) = 2$, $f'(0) = 1$: $y = x + 2$.

Corrigé de l'application 6

1. $g'(x) = \mathrm{e}^x - 1$: négatif si $x < 0$ (car $\mathrm{e}^x < 1$), positif si $x > 0$. g décroît sur $]-\infty\,;0]$ et croît sur $[0\,;+\infty[$; minimum $g(0) = 1 - 0 - 1 = 0$.

2 Donc $g(x) \geqslant 0$, c'est-à-dire $\mathrm{e}^x \geqslant x+1$: la courbe de $\exp$ est au-dessus de sa tangente $y = x+1$ en 0.

Corrigé de l'application 7

1 $f'(x) = \mathrm{e}^{-x} + x \times (-\mathrm{e}^{-x}) = (1-x)\mathrm{e}^{-x}$, du signe de $1-x$: f croît sur $]-\infty\,;1]$, décroît sur $[1\,;+\infty[$; maximum $f(1) = \mathrm{e}^{-1} = \dfrac{1}{\mathrm{e}} \approx 0{,}37$.

2 $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$: $T : y = x$.

3 Si $x < 0$: $x < 0$ et $\mathrm{e}^{-x} > 1$, donc $f(x) - x < 0$. Si $x > 0$: $x > 0$ et $\mathrm{e}^{-x} < 1$, donc $f(x) - x < 0$. $\mathcal{C}_f$ est en dessous de T (elle la touche en O).