Cours 6 : Fonctions exponentielles

Niveau : 2ème Année Bac Sciences économiques et Gestion comptable

I- La fonction exponentielle népérienne 1

II- Limites usuelles 3

III- Dérivée de la fonction exponentielle 3

IV- Fonctions exponentielles de base a 4

$$a^x = e^{x \ln a}$$

Fonctions exponentielles - 2ème Bac Sciences économiques et Gestion comptable -

I) La fonction exponentielle népérienne

La fonction logarithme népérien ln est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$, donc elle admet une fonction réciproque définie sur

$$\ln(]0;+\infty[) = \left]\lim_{x\to 0^+} \ln x\,;\lim_{x\to+\infty} \ln x\right[=]-\infty;+\infty[= \mathbb{R}.$$

Définition :

La fonction réciproque de la fonction ln est appelée la ***fonction exponentielle népérienne*** et notée : exp.

Notation :

Pour tout réel x, on pose : $exp(x) = e^x$.

Donc : $exp : \mathbb{R} \longrightarrow]0;+\infty[$

$x \longmapsto exp(x) = e^x$

Courbe de la fonction *exp* :

Dans un repère orthonormé, la courbe représentative de la fonction exp est symétrique de celle de la fonction ln par rapport à la droite d'équation $y = x$.

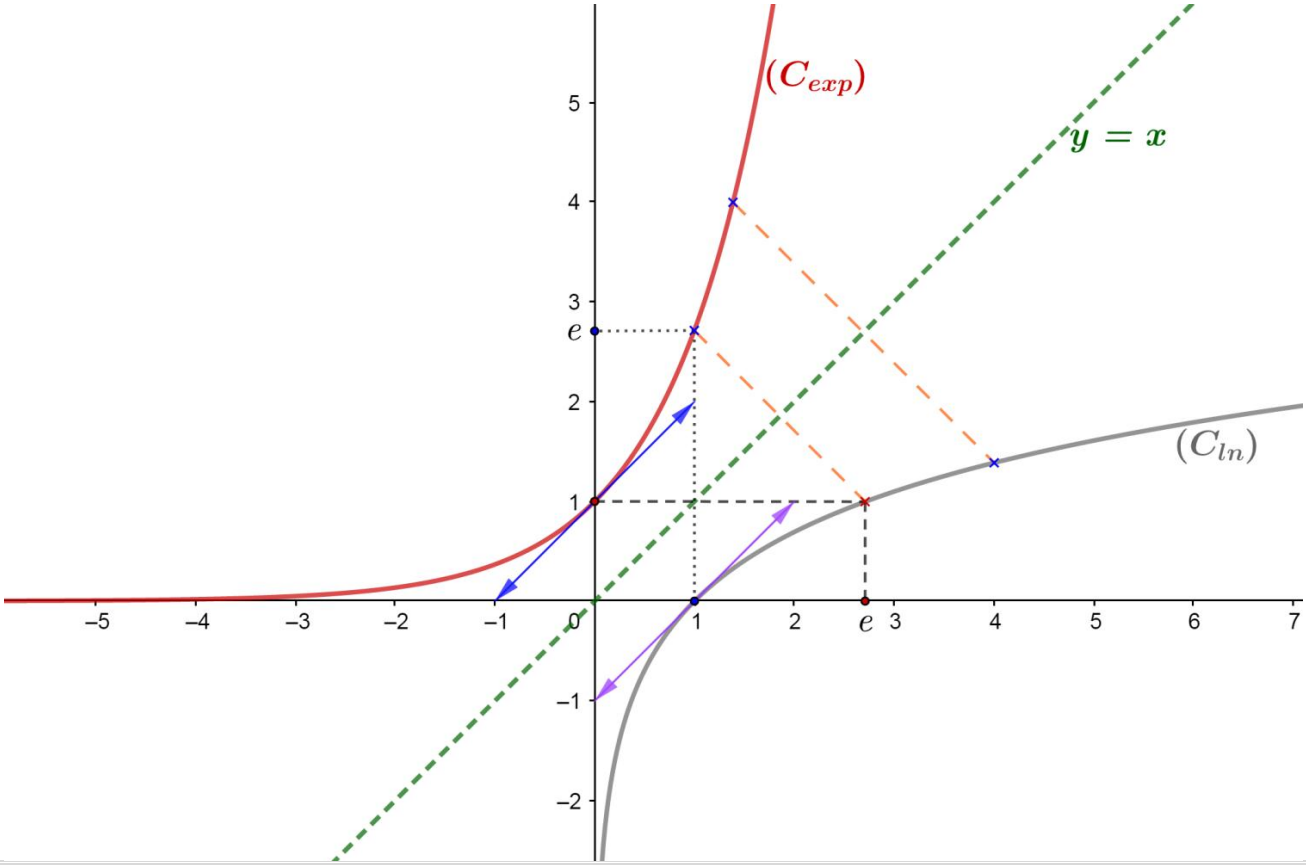


Tableau de variations de la fonction *exp* :

D'après la courbe de la fonction *exp*, on a donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
exp	0	↗	$+\infty$

Conséquences:

- L'ensemble de définition de la fonction *exp* est : $\mathcal{D}_{exp} = \mathbb{R}$.
- La fonction *exp* est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- $e^0 = 1$ et $e^1 = e$
- Pour tout réel x, on a : $e^x > 0$.
- Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $\ln(e^x) = x$.
- Pour tout x de $]0;+\infty[$, on a : $e^{\ln x} = x$.
- Pour tout x de $\mathbb{R}$ et tout y de $]0;+\infty[$, on a : $e^x = y \iff x = \ln y$.
- Pour tout réels x et y de $\mathbb{R}$, on a :
  - $e^x = e^y \iff x = y$
  - $e^x > e^y \iff x > y$

Exercice 1 :

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $e^{2x+5} = e^{\frac{3}{x}}$.

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $e^{x^2-4} \geq e^{-3x}$.

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $2e^{2x} - 8e^x + 6 = 0$.

Propriétés algébriques :

Pour tout x et y de $\mathbb{R}$ et n de $\mathbb{Z}$, on a :

- $e^{x+y} = e^x . e^y$
- $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$
- $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$
- $e^{nx} = (e^x)^n$

Exercice 2 :

Simplifier l'écriture des nombres suivants :

☑ $A = \frac{e^7 . e^{-4}}{e^{-5}}$ ☑ $B = (e^5)^{-3} . e$ ☑ $C = \frac{1}{(e^{-3})^2} . \frac{(e^4)^{-1}}{e^2 . e^{-6}}$

Exercices de 3 à 4 p.215 et de 10 à 16 p.216

II) Limites usuelles

Propriété :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$	$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$	$\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$
$\lim\limits_{x\to-\infty} x.e^x = 0$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$	
$\lim\limits_{x\to-\infty} x^n.e^x = 0$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$	

Exercice 3 :

Calculer les limites suivantes :

☑ $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2-3x}$ ☑ $\lim\limits_{x\to-\infty} x.e^{5+x}$ ☑ $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(3x^2-5x\right).e^x$

☑ $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x}{3x-1}$ ☑ $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{3x}-e^x$ ☑ $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{2x+1}{x-1}}$

☑ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{\sqrt{x}}$ ☑ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{3x}+2}{x^3}$ ☑ $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$

Exercices de 21 à 25 p.217

III) Dérivée de la fonction exponentielle

Propriété 1 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

- La fonction $x \longmapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et : $\forall x \in \mathbb{R} : (e^x)' = e^x$.
- Si une fonction u est dérivable sur un intervalle I, alors la fonction $f : x \longmapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I, et : $\forall x \in I : f'(x) = u'(x).e^{u(x)}$.

On retiendra : $(\boldsymbol{e^u})' = \boldsymbol{u'.e^u}$.

Exemple :

Puisque la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $]0;+\infty[$, alors la fonction $f : x \longmapsto e^{\frac{1}{x}}$ est dérivable sur $]0;+\infty[$, et on a :

$$\forall x \in]0;+\infty[: f'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)'.e^{\frac{1}{x}} = \frac{-1}{x^2}.e^{\frac{1}{x}}.$$

Exercice 4 :

f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{e^x}{e^x+2}$ et $g(x) = e^{x^2-3x}$.

Déterminer la fonction dérivée de f et g.

Exercices 26 et 27 p.217

Propriété 2 :

1) Les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \longmapsto e^x$ sont les fonctions de la forme $x \longmapsto e^x + k$ où k est un réel.

2) Plus généralement, soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.

Les primitives sur I de la fonction $x \longmapsto u'(x).e^{u(x)}$ sont les fonctions de la forme $x \longmapsto e^{u(x)} + k$ où k est un réel.

On retiendra : une primitive de $\boldsymbol{u'.e^u}$ est $\boldsymbol{e^u}$.

Exercices de 30 à 32 p.217

IV) Fonctions exponentielles de base a

Définition :

Soit a un réel strictement positif et diffèrent de 1.

La *fonction exponentielle de base a* notée : exp_a est la fonction réciproque de la fonction log_a, et on a : $\forall x \in \mathbb{R} : exp_a(x) = e^{x \ln a} = a^x$.

Remarques :

- Pour tout x de $\mathbb{R}$ et tout y de $]0;+\infty[$, on a :

$$exp_a(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_a y$$

- La fonction exponentielle de base e est la fonction exponentielle népérienne exp, et on a : $\forall x \in \mathbb{R} : exp_e(x) = e^{x \ln e} = e^x$.

Propriétés algébriques :

Soient a et b deux réels strictement positifs et différents de 1.

Pour tout x et y de $\mathbb{R}$, on a :

- $a^{x+y} = a^x.a^y$
- $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$
- $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$
- $a^{x.y} = (a^x)^y$
- $(a.b)^x = a^x.b^x$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$
- $a^x = a^y \quad \Leftrightarrow \quad x = y$

Propriété :

Soient a et b deux réels strictement positifs et différents de 1.

La fonction exp_a est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $\forall x \in \mathbb{R} : (a^x)' = \left(e^{x \ln a}\right)' = \ln(a) \cdot a^x$.

Exemple :

on considère les fonctions exponentielles f et g de bases 2 et $\frac{1}{3}$ respectivement :

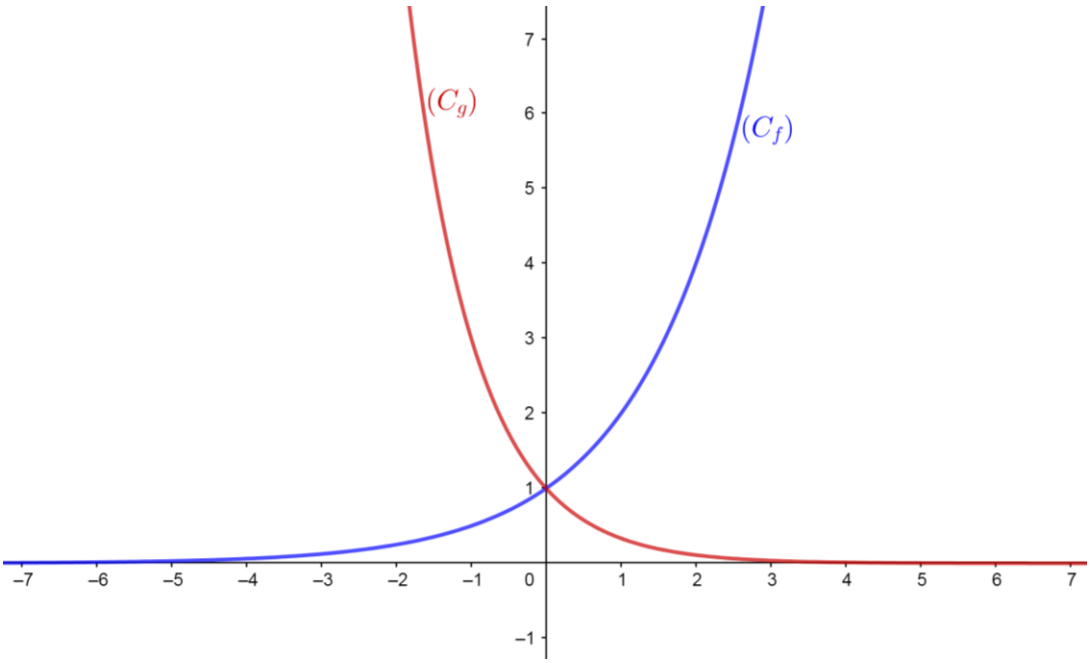
$$f(x) = 2^x = e^{x \ln 2} \quad \text{et} \quad g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x = e^{x \ln \frac{1}{3}} = e^{-x \ln 3}$$

On a : $f'(x) = \ln 2 \cdot e^{x \ln 2} > 0$ pour tout réel x,

donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

et $g'(x) = -\ln 3 \cdot e^{-x \ln 3} < 0$ pour tout réel x,

donc g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.



Exercice 46 p.218 + Exercice 50 p.219 + Exercice 54 p.221