Chapitre 8

Fonctions exponentielles

Niveau : 2ème Année Bac

PC & SVT

MATHEMATIQUES

~Prof : Bouyguir Taher~

Contenu du chapitre 8

I. La fonction exponentielle népérienne 1

II. Limites usuelles 3

III. Dérivée de la fonction exponentielle 3

IV. Fonctions exponentielles de base a 4

$a^x = e^{x \ln a}$

I. La fonction exponentielle népérienne

La fonction logarithme népérien ln est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$, donc elle admet une fonction réciproque définie sur

$$\ln(]0;+\infty[) = \left]\lim_{x\to 0^+} \ln x\,;\lim_{x\to+\infty} \ln x\right[=]-\infty;+\infty[= \mathbb{R}.$$

Définition 1 :

La fonction réciproque de la fonction ln est appelée la **fonction exponentielle népérienne** et notée : exp.

Notation :

Pour tout réel x, on pose : $exp(x) = e^x$.

Donc : $exp : \mathbb{R} \longrightarrow]0;+\infty[$

$x \longmapsto exp(x) = e^x$

Courbe de la fonction exp :

Dans un repère orthonormé, la courbe représentative de la fonction exp est symétrique de celle de la fonction ln par rapport à la droite d'équation $y = x$.

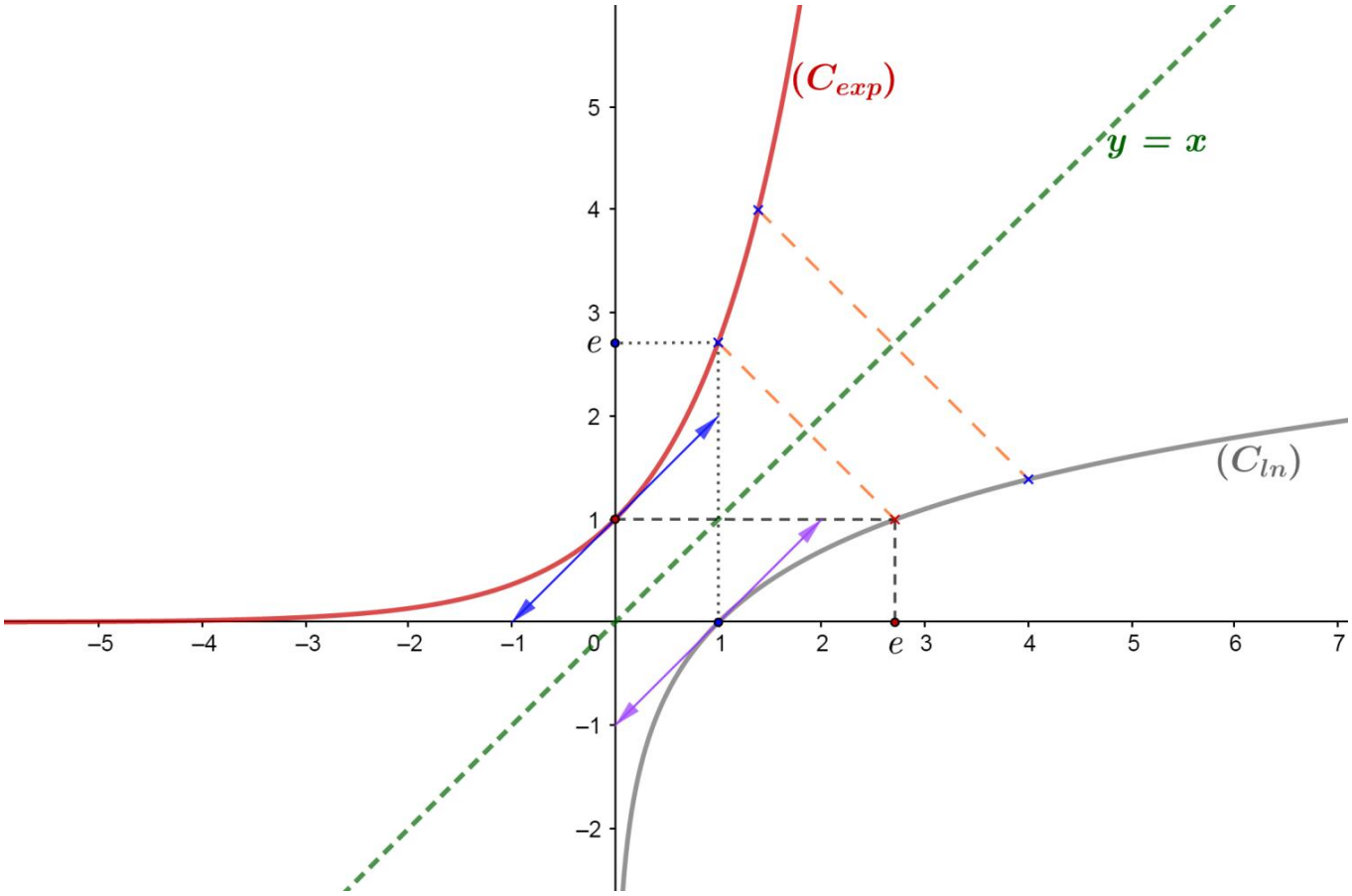


Tableau de variations de la fonction exp :

D'après la courbe de la fonction exp, on a donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
exp	0	↗	$+\infty$

Conséquences :

- L'ensemble de définition de la fonction exp est : $\mathcal{D}_{exp} = \mathbb{R}$
- La fonction exp est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$
- $e^0 = 1$ et $e^1 = e$
- Pour tout réel x, on a : $e^x > 0$
- Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $\ln(e^x) = x$
- Pour tout x de $]0;+\infty[$, on a : $e^{\ln x} = x$
- Pour tout x de $\mathbb{R}$ et tout y de $]0;+\infty[$, on a : $e^x = y \iff x = \ln y$
- Pour tout réels x et y de $\mathbb{R}$, on a :
  - $e^x = e^y \iff x = y$
  - $e^x > e^y \iff x > y$

Application 1 :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $e^{2x+5} - e^{-x} = 0$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $e^{x^2-4} \geq e^{-3x}$
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $2e^{2x} - 8e^x + 6 = 0$
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $(e^x - 1)(2 - e^{3x}) \geq 0$

Propriété 1 :

Pour tout x et y de $\mathbb{R}$ et n de $\mathbb{Z}$, on a :

- $e^{x+y} = e^x . e^y$
- $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$
- $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$
- $e^{nx} = (e^x)^n$

Application 2 :

Simplifier l'écriture des nombres suivants :

- $A = \dfrac{e^7 . e^{-4}}{e^{-5}}$
- $B = (e^3 + e^{-3})^2 - (e^3 - e^{-3})^2$
- $C = \dfrac{1}{(e^{-3})^2} . \dfrac{(e^4)^{-1}}{e^2 . e^{-6}}$

II. Limites usuelles

Propriété 2 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$	$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$	$\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$
$\lim\limits_{x\to-\infty} x.e^x = 0$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$	
$\lim\limits_{x\to-\infty} x^n.e^x = 0$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$	

Application 3 :

Calculer les limites suivantes :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2-3x}$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x.e^{5+x}$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(3x^2-5x\right).e^x$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x}{3x-1}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x-e^{3x}}{e^x+2}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{2x+1}{x-1}}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{\sqrt{x}}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{3x}+2}{x^3}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$

III. Dérivée de la fonction exponentielle

Propriété 3 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

- La fonction $x \longmapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a : $\forall x \in \mathbb{R} : (\boldsymbol{e^x})' = \boldsymbol{e^x}$.
- Si une fonction u est dérivable sur un intervalle I, alors la fonction $f : x \longmapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I, et : $\forall x \in I : f'(x) = u'^{(x)}.e^{u(x)}$.

On retiendra : $\boldsymbol{(e^u)' = u'.e^u}$.

Exemple :

Puisque la fonction $x \longmapsto 3+\sqrt{x}$ est dérivable sur $]0;+\infty[$,

alors la fonction $f : x \longmapsto e^{3+\sqrt{x}}$ est dérivable sur $]0;+\infty[$, et on a :

$$\forall x \in]0;+\infty[: \quad f'(x) = \left(3+\sqrt{x}\right)'.e^{3+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.e^{3+\sqrt{x}}$$

Application 4 :

Déterminer les dérivées des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{3e^x}{e^x + 2} \quad \text{et} \quad g(x) = e^{x^2-3x}$$

Propriété 4 :

- Les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \longmapsto e^x$ sont les fonctions de la forme $x \longmapsto e^x + k$ où k est un réel.
- Plus généralement, soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.

  Les primitives sur I de la fonction $x \longmapsto u'(x).e^{u(x)}$ sont les fonctions de la forme $x \longmapsto e^{u(x)} + k$ où k est un réel.

On retiendra : une primitive de $\boldsymbol{u'.e^u}$ est $\boldsymbol{e^u}$.

Application 5 :

Déterminer les primitives des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x + 2} \quad \text{et} \quad g(x) = (x^2 - 1)\, e^{x^3-3x}$$

IV. Fonctions exponentielles de base a

Définition 2 :

Soit a un réel strictement positif et diffèrent de 1.

La **fonction exponentielle de base a** notée : exp_a est la fonction réciproque de la fonction log_a , et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R} : \boldsymbol{exp_a(x) = e^{x \ln a} = a^x}$$

Remarques :

- Pour tout x de $\mathbb{R}$ et tout y de $]0; +\infty[$, on a :

$$exp_a(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_a y$$

- La fonction exponentielle de base e est la fonction exponentielle népérienne exp, et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R} : exp_e(x) = e^{x \ln e} = e^x$$

Propriété 5 :

Soient a et b deux réels strictement positifs et différents de 1.

Pour tout x et y de $\mathbb{R}$, on a :

- $a^{x+y} = a^x . a^y$
- $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$
- $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$
- $a^{x.y} = (a^x)^y$
- $(a.b)^x = a^x . b^x$
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$
- $a^x = a^y \iff x = y$

Propriété 6 :

Soient a et b deux réels strictement positifs et différents de 1.

La fonction exp_a est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $\forall x \in \mathbb{R} : (\boldsymbol{a^x})' = \left(\boldsymbol{e^{x \ln a}}\right)' = \boldsymbol{\ln(a) . a^x}$

Exemple :

On considère les fonctions exponentielles f et g de bases 2 et $\dfrac{1}{3}$ définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2^x \quad \text{et} \quad g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

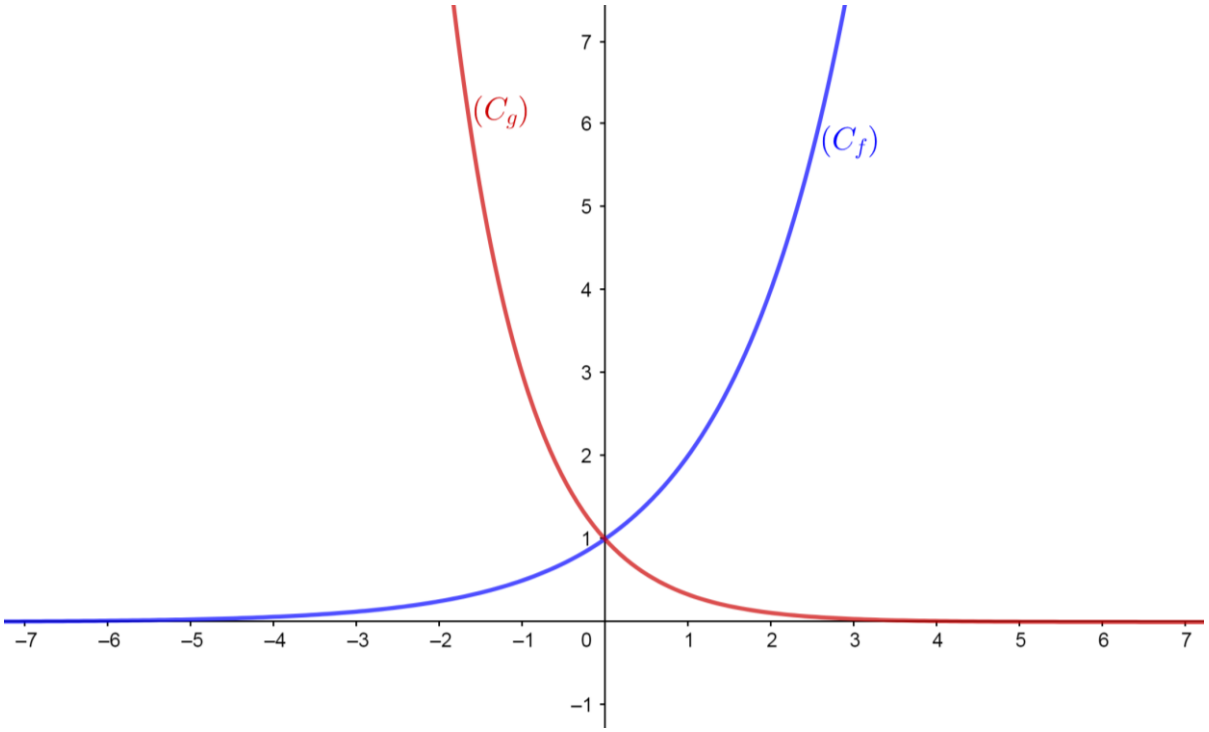
On a : $f(x) = 2^x = e^{x \ln 2}$ et $g(x) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x = e^{x \ln \frac{1}{3}} = e^{-x \ln 3}$

Donc pour tout réel x : $f'(x) = \ln 2 . e^{x \ln 2} > 0$

Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

et pour tout réel x : $g'(x) = -\ln 3 . e^{-x \ln 3} < 0$

Donc g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.



Application 6 :

Déterminer les dérivées des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \left(\frac{4}{5}\right)^x - 6^x \quad \text{et} \quad g(x) = 3^{x^2-1}$$

Propriété 7 :

Soit a un nombre réel strictement positif et différent de 1.

- Si $a > 1$ alors : la fonction $x \longmapsto a^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
- Si $0 < a < 1$ alors : la fonction $x \longmapsto a^x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

Propriété 8 :

Soit a un nombre réel strictement positif et différent de 1.

Pour tout x et y de $\mathbb{R}$, on a :

- Si $a > 1$ alors : $a^x < a^y \iff x < y$
- Si $0 < a < 1$ alors : $a^x < a^y \iff x > y$