Cours 6 : Fonctions logarithmes

Niveau : 2ème Bac Sciences économiques et Gestion comptable

I- La fonction logarithme népérien 1

1) Définition et conséquences 1

2) Propriétés algébriques de la fonction ln 3

3) Limites fondamentales 4

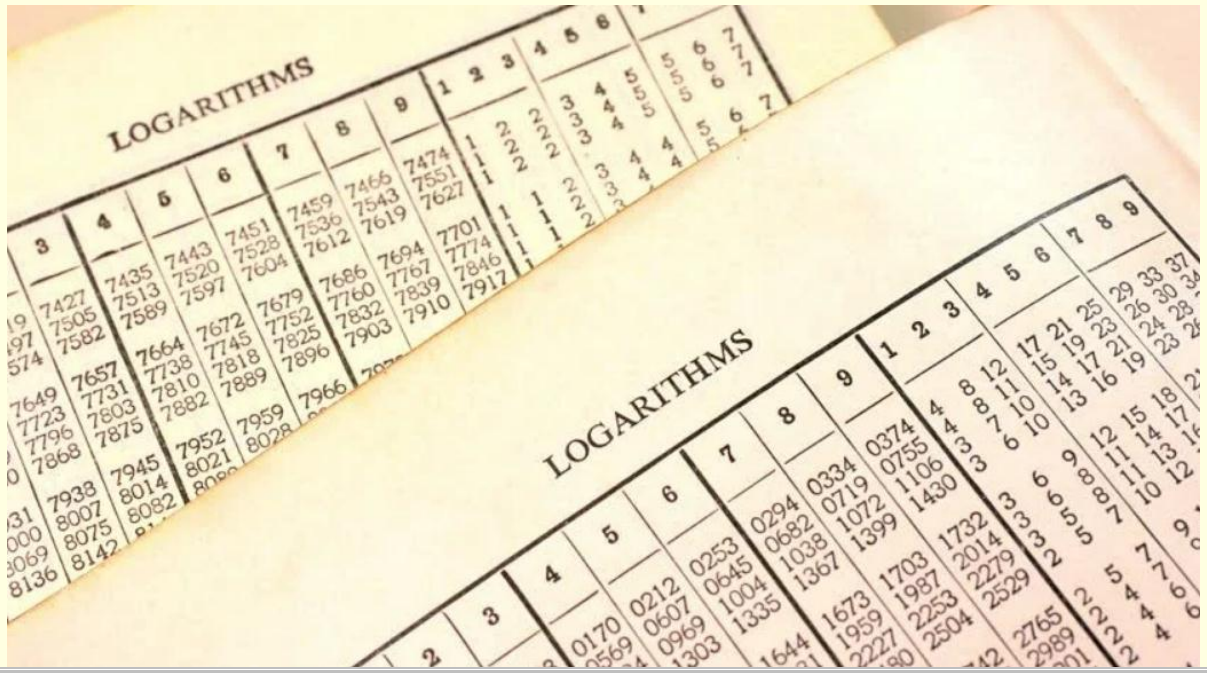
4) Étude de la fonction logarithme népérien 4

5) Dérivée de la fonction $x \mapsto \ln(u(x))$ 6

II- La fonction logarithme de base a 6

1) La fonction logarithme de base a 6

2) La fonction logarithme décimal 7



Fonctions logarithmes - 2ème Bac Sciences économiques et Gestion comptable -

I) La fonction logarithme népérien

1) Définition et conséquences :

Définition 1 :

La fonction ***logarithme népérien***, notée ln, est l'unique primitive de la fonction continue $x \longmapsto \frac{1}{x}$ définie sur $]0;+\infty[$ qui s'annule en 1.

Conséquences directes :

- L'ensemble de définition de la fonction ln est $]0;+\infty[$, et $\ln(1) = 0$.
- La fonction ln est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $\forall x \in]0;+\infty[: \ln' x = (\ln x)' = \frac{1}{x}$.
- La fonction ln est continue sur $]0;+\infty[$.
- La fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Exercice résolu 1 :

Déterminer les domaines de définition des fonctions f, g et h définies par :

$$f(x) = \ln(1-x) \quad ; \quad g(x) = \ln(x^2-1) \quad ; \quad h(x) = \ln\left(\frac{3-x}{x+2}\right).$$

Solution :

- On a : $x \in \mathcal{D}_f \iff 1-x > 0 \iff x < 1$

  Ainsi : $\mathcal{D}_f =]-\infty;1[$.

- On a : $x \in \mathcal{D}_g \iff x^2-1 > 0$;

  Or, le signe de x^2-1 est donné par le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2-1		+	0	−	0	+	

  On en déduit ainsi que : $\mathcal{D}_g =]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$.

- On a : $x \in \mathcal{D}_h \iff \frac{3-x}{x+2} > 0$ et $x+1 \neq 0$;

  Or, le signe de $\frac{3-x}{x+2}$ est donné par le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$3-x$		+	||	+	0	−	
$x+2$		−	0	+	||	+	
$\frac{3-x}{x+2}$		−	||	+	0	−	

  On en déduit ainsi que : $\mathcal{D}_h =]-2;3[$.

Propriété 1 :

Soient x et y deux réels strictement positifs, on a :

- $x = y \iff \ln x = \ln y$
- $x < y \iff \ln x < \ln y$

Cas particuliers :

$\ln x = 0 \iff x = 1$ $\quad \ln x < 0 \iff 0 < x < 1$ $\quad \ln x > 0 \iff x > 1$

ainsi, nous en déduisons le tableau de signe de la fonction ln :

x	0		1		$+\infty$
Signe de $\ln x$	‖	$-$	0	$+$	

Exercice résolu 2 :

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\ln(3x-1) = \ln(1-x)$ $\qquad$ b) $\ln(2x-3) = \ln(4x-1)$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $\ln(2x-3) \leq \ln(x-1)$ $\qquad$ b) $\ln(x+1) - \ln(3-x) > 0$

Solution :

1) a) Résolvons l'équation $\ln(3x-1) = \ln(1-x)$.

Cette équation est définie si et seulement si : $3x-1>0$ et $1-x>0$.

La première inéquation donne $x > \frac{1}{3}$, et la deuxième donne $x < 1$,

d'où le domaine de définition de l'équation est $\left]\frac{1}{3}; 1\right[$.

On restreint donc la recherche des solutions à cet intervalle.

Soit $x \in \left]\frac{1}{3}; 1\right[$, on a : $\ln(3x-1) = \ln(1-x) \iff 3x-1 = 1-x$

$\iff 4x = 2$

$\iff x = \frac{1}{2}$

Cette solution appartient à l'intervalle $\left]\frac{1}{3}; 1\right[$, donc : $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

b) Résolvons l'équation $\ln(2x-3) = \ln(4x-1)$.

Cette équation est définie si et seulement si $2x-3>0$ et $4x-1>0$.

La première inéquation donne $x > \frac{3}{2}$ et la deuxième donne $x > \frac{1}{4}$,

donc le domaine de définition de l'équation est $\left]\frac{3}{2}; +\infty\right[$.

Soit $x \in \left]\frac{3}{2}; +\infty\right[$, on a : $\ln(2x-3) = \ln(4x-1) \iff 2x-3 = 4x-1$

$\iff -2x = 2$

$\iff x = -1$

Cette solution n'appartient pas à l'intervalle $\left]\frac{3}{2}; +\infty\right[$,

donc l'équation n'a pas de solution.

2) a) Résolvons l'inéquation $\ln(2x-3) \leq \ln(x-1)$.

Cette inéquation est définie si et seulement si : $2x-3 > 0$ et $x-1 > 0$.

La première inéquation donne $x > \frac{3}{2}$ et la deuxième donne $x > 1$,

donc le domaine de définition de l'inéquation est $\left]\frac{3}{2}; +\infty\right[$.

Soit $x \in \left]\frac{3}{2}; +\infty\right[$, on a : $\ln(2x-3) \leq \ln(x-1) \iff 2x-3 \leq x-1$

$\iff x \leq 2$

Donc l'ensemble des solutions de cette inéquation est :

$$\mathcal{S} = \left]\frac{3}{2}; +\infty\right[\cap]-\infty; 2] = \left]\frac{3}{2}; 2\right].$$

b) Résolvons l'inéquation $\ln(x+1) - \ln(3-x) > 0$.

Cette inéquation est définie si et seulement si : $x+1 > 0$ et $3-x > 0$.

La première inéquation donne $x > -1$ et la deuxième donne $x < 3$,

donc le domaine de définition de l'inéquation est $]-1; 3[$.

Soit $x \in]-1; 3[$, on a : $\ln(x+1) - \ln(3-x) > 0 \iff \ln(x+1) > \ln(3-x)$

$\iff x+1 > 3-x$

$\iff x > 1$

Donc l'ensemble des solutions de cette inéquation est :

$$\mathcal{S} =]-1; 3[\cap]1; +\infty[=]1; 3[.$$

2) Propriétés algébriques de la fonction ln :

Propriété 2 : Pour tous réels strictement positifs x et y et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a :

- $\ln(xy) = \ln x + \ln y$
- $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$
- $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$
- $\ln\sqrt{x} = \frac{1}{2}\ln x$
- $\ln(x^n) = n \ln x$

En résumé, le logarithme népérien a la particularité de transformer les produits en sommes, les quotients en différences et les puissances en multiplications.

Application 1 :

1) Exprimer en fonction de ln 2 et ln 3 les réels suivants :

- $\ln 24$
- $\ln 36$
- $\ln(9^{2021})$
- $\ln\frac{2}{\sqrt{3}}$
- $\ln\frac{\sqrt{6}}{4}$
- $\ln\sqrt{3-\sqrt{3}}+\ln\sqrt{3+\sqrt{3}}$

2) Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $2^n \geq 2021$.

3) Limites fondamentales :

Propriété 3 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} x^n \ln x = 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$
- $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

Application 2 :

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 0^+}(3x^2-4)\ln x$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x+2}{3x-4}\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3\ln x+2}{\ln x-1}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x-1}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x-1)}{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2-x+3)}{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^4)}{x^6}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x^5\ln(x^9)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x-\ln x$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln x}$; $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}+\ln x$; $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x)^2-\ln x$

$\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to 0^+} x(\ln x)^2$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

4) Étude de la fonction logarithme népérien :

4.1- Tableau de variations

On peut résumer les variations et les limites de la fonction ln, dans le tableau suivant:

x	0	$+\infty$
$\ln' x$	‖	$+$
ln	$-\infty$ ‖	$+\infty$

4.2- Le nombre e

- L'équation $\ln x = 1$ admet une solution unique dans $]0;+\infty[$. On la note : e.
  Donc : $\ln x = 1 \iff x = e$.
- Le nombre e est irrationnel, et sa valeur approchée est : $e \simeq 2{,}71828$.
- Pour tout entier relatif n on a : $\ln(e^n) = n$.

4.3- Branches infinies

- Puisque : $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$

  Alors l'axe des ordonnées est une asymptote à la courbe représentative de ln.

- Puisque : $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

  Alors la courbe représentative de ln admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$.

4.4- Tangente au point d'abscisse 1

L'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de la fonction logarithme népérien au point $A(1;0)$ est : $y = x - 1$.

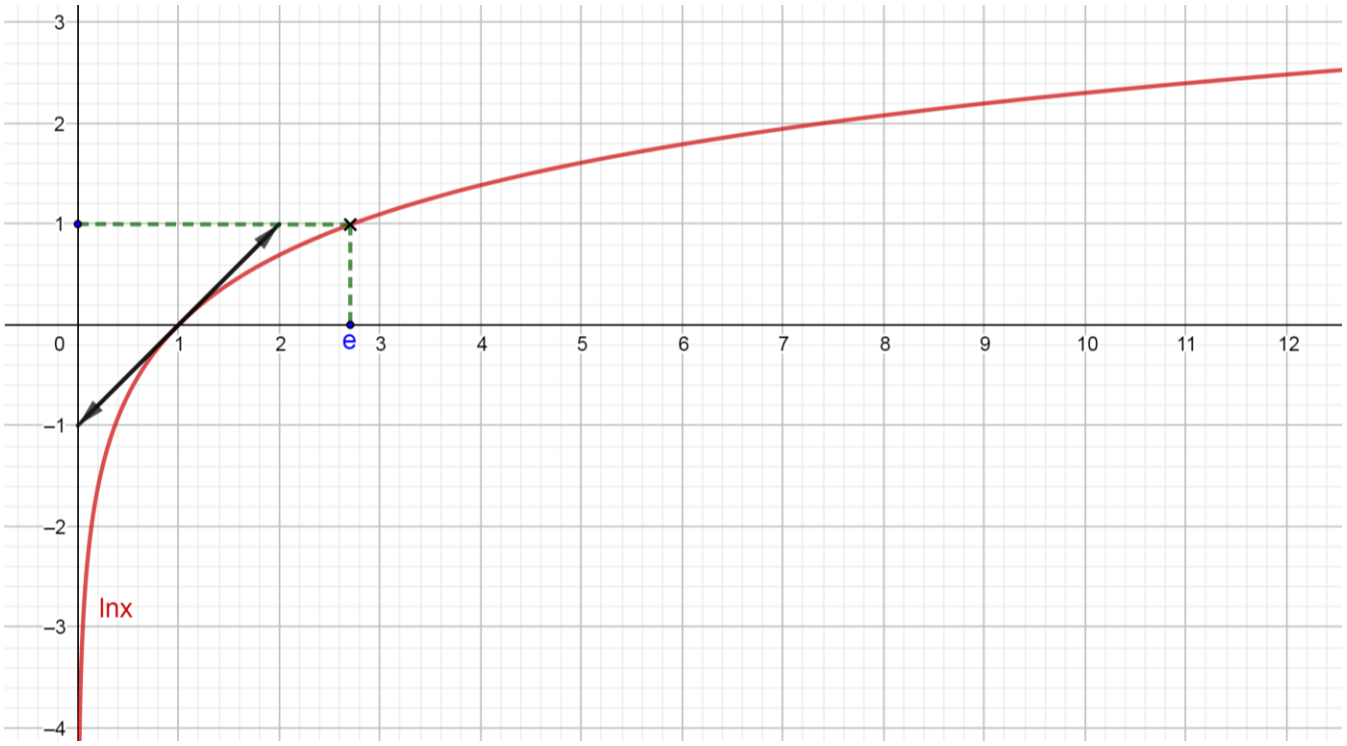
4.5- Concavité :

Pour tout $x \in]0;+\infty[$: $\ln''(x) = -\frac{1}{x^2}$,

alors la courbe représentative de ln est concave sur $]0;+\infty[$.

4.6- Représentation graphique

Voici le graphe de la fonction logarithme népérien.



5) Dérivée de la fonction $x \mapsto \ln(u(x))$:

Propriété 4 :

Si u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I, Alors la fonction $f: x \mapsto \ln(u(x))$ est dérivable sur I, et pour tout $x \in I$, on a :

$$f'(x) = \ln'(u(x)) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Exemple :

La fonction u définie par $u(x) = x^2 + x + 1$ et strictement positive sur $\mathbb{R}$,

Donc $\ln(u(x))$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $\ln'(x^2 + x + 1) = \frac{(x^2+x+1)'}{x^2+x+1} = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$.

Conséquence :

Soit u une fonction définie et dérivable sur I.

- Si u est strictement positive sur I, alors les primitives de $\frac{u'(x)}{u(x)}$ sont de la forme $\ln(u(x)) + c$, où c est une constante réelle.
- Si u est strictement négative sur I, alors les primitives de $\frac{u'(x)}{u(x)}$ sont de la forme $\ln(-u(x)) + c$, où c est une constante réelle.

Application 3 :

Déterminer une primitive F de la fonction f définie sur $I =]3; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{2x-6}$.

Déterminer une primitive G de la fonction f définie sur $I =]-\infty; 3[$ par $f(x) = \frac{1}{2x-6}$.

II) La fonction logarithme de base a

1) La fonction logarithme de base a :

Définition 2 :

Soit a un nombre réel strictement positif et diffèrent de 1.

La fonction *logarithme de base a*, notée $\log_a$, est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Remarques :

- La fonction logarithme de base e, est la fonction logarithme népérien ; En effet :

$$\forall x \in]0; +\infty[: \log_e(x) = \frac{\ln x}{\ln e} = \ln x$$

- On a : $\log_a(1) = 0$ et $\log_a(a) = 1$ et $\forall n \in \mathbb{Z} : \log_a(a^n) = n$.
- Les propriétés de la fonction $\log_a$ sont les mêmes que celles de la fonction ln.

Propriété 5 :

Soit a un nombre réel strictement positif et diffèrent de 1.

Pour tout réels strictement positifs x et y et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a :

- $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$
- $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$
- $\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x)$
- $\log_a\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2}\log_a(x)$
- $\log_a(x^n) = n\log_a(x)$

Application 4 :

Simplifier les nombres suivants :

$$A = \log_2\left(\sqrt{8}\right) ; \quad B = \log_{\frac{1}{2}}(2^4) ; \quad C = \log_2(64) - \log_3(81) + \log_5\left(\frac{1}{125}\right)$$

2) La fonction logarithme décimal :

Définition 3 :

La fonction ***logarithme décimal***, notée log, est la fonction logarithme de base 10;

et on a : $\forall x \in]0;+\infty[: \log(x) = \frac{\ln x}{\ln 10}$.

Remarque :

Pour tout $x > 0$ et pour tout $y \in \mathbb{Z}$, on a :

$$\log(x) = y \iff x = 10^y \quad \text{ou encore} \quad \log(10^y) = y.$$

Application 5 :

Simplifier les nombres suivants :

$$A = \log(100000) ; \quad B = \log(0{,}0001) ; \quad C = \log(100) - \log(0{,}001) + \log\left(\frac{1}{1000000}\right)$$