Fonction logarithme népérienne

Remarques

I. Fonction ln

1) Définition et propriétés :

Définition

Il existe une fonction s'appelle fonction logarithme népérienne noté $\ln$ *définie sur* $]0;+\infty[$ *et on a :* $(\forall x\in]0;+\infty[):\ln'(x)=\frac{1}{x}$ *.La fonction* $\ln$ *s'annule en* 1 *c'est-à-dire* $\ln(1)=0$ *.*

Remarque :

La fonction $x\mapsto \ln(u(x))$ *est bien définie si et seulement si* $u(x)\succ 0$.

Exemples :

Déterminer le domaine de définition de la fonction $x\mapsto \ln(4x-8)$

Application :

Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

$f_1(x)=\ln(3x+6)$ $f_2(x)=\ln(4x+4)$ $f_3(x)=\ln(x-4)$

$f_4(x)=\ln(x-1)$ $f_5(x)=\ln(-x+4)$ $f_6(x)=\frac{1}{x}+\ln(x)$

Propriétés

Soient a *et* b *deux nombres strictement positifs et* n *un nombre relatif on a :*

$\ln(ab)=\ln(a)+\ln(b)$ $\ln(a^n)=n\ln(a)$ $\ln\left(\frac{1}{a}\right)=-\ln(a)$

$\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln(a)-\ln(b)$ $\ln\left(\sqrt{a}\right)=\frac{1}{2}\ln(a)$

Exemples :

Sachant que $\ln(2)=0,7$ et $\ln(3)=1,1$ *calculer ce qui suit :*

$\ln(6)$ $\ln(4)$ $\ln(8)$ $\ln\left(\frac{1}{2}\right)$ $\ln\left(\frac{3}{2}\right)$ $\ln(72)$ $\ln\left(\sqrt{2}\right)$ $\ln\left(\sqrt{6}\right)$ $\ln\left(3\sqrt{2}\right)$

Exercice 1

Sachent que $\ln(2)=0,7$ et $\ln(5)=1,6$, *calculer ce qui suit :*

$\ln(10)$ $\ln(25)$ $\ln(16)$ $\ln(125)$ $\ln\left(\frac{1}{5}\right)$ $\ln\left(\frac{2}{5}\right)$ $\ln\left(\sqrt{5}\right)$ $\ln\left(2\sqrt{5}\right)$

Vérifier que $2\ln(4)+\ln\left(\frac{1}{2}\right)-\ln(8)=0$.

Exercice 2

Simplifier ce qui suit :

$A=\ln(3)-\ln(5)+\ln(15)$

$B=\ln(0,01)-\ln(1000)+\ln(10^6)$

Exercice 3

Sachant que $\ln(2)\simeq 0,7$ et $\ln(11)\simeq 2,4$, *calculer ce qui suit :*

$\ln(22)$ $\ln(121)$ $\ln(32)$ $\ln(44)$ $\ln\left(\frac{11}{2}\right)$.

Exercice d'application 1 : ***Simplifier:***

$A=\ln(2)-2\ln(8)-\ln\left(\frac{1}{16}\right)$; $B=2\ln(3)+\ln(9)-\ln\left(\frac{1}{81}\right)$; $C=\ln(16)-\ln(40)+\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{125}\right)$

$D=\ln(20)+5\ln(2)+\ln(100)$; $E=\ln\left(\sqrt{3}+1\right)+\ln\left(\sqrt{3}-1\right)$; $F=\ln\left(\sqrt{2}+1\right)^{2021}+\ln\left(\sqrt{2}-1\right)^{2021}$

Exercice d'application 2 : ***Calculer les expressions suivantes :***

$A=\ln(1)+\ln(e)$; $B=2\ln(e)-\ln(e)$; $C=\ln(2e)-\ln(e^2)-\ln(2)$; $D=\frac{\ln(e)}{\ln(e^2)}+\ln\left(\frac{1}{e}\right)$

$G=\ln(3e^2)-\ln\left(\frac{3}{\sqrt{e}}\right)$; $E=\ln\left(\sqrt{e}\right)-\ln(e^2)-\ln\left(\frac{1}{2}\right)$; $F=\ln\left(\sqrt{e^5}\right)-3\ln(e^4)+\ln\left(\frac{1}{e}\right)$

Propriétés

Pour tout $x>0$ **et** $y>0$ *on a :*

$\ln(x)=\ln(y)$ *si et seulement si :* $x=y$

$\ln(x)>\ln(y)$ *si et seulement si :* $x>y$

Exercice d'application 1 : ***Résoudre dans*** $\mathbb{R}$ ***les équations suivantes :***

$\ln(x)=0$; $\ln(x)=1$; $\ln(x)=7$; $\ln(x+6)=\ln(3)$; $\ln(x+2)=\ln(3-x)$

$\ln(x+4)+\ln(x-2)=\ln(7)$; $\ln(x)+\ln(4-x)=\ln(6-x)$; $(\ln(x))^2-10\ln(x)+9=0$

Exercice à domicile 1 : ***Résoudre dans*** $\mathbb{R}$ ***les équations suivantes :***

$\ln(x)=5$; $\ln(x+1)=\ln(2)$; $\ln(2x+3)+\ln(-5x+4)=\ln(-7x+2)$;

$\ln^2(x)-3\ln(x)+2=0$

Exercice d'application 2 : ***Résoudre dans*** $\mathbb{R}$ ***les inéquations suivantes :***

$\ln(5x+3)>\ln(13)$; $\ln(x-2)<\ln(2)$; $\ln(-x+6)<\ln(x)$;

$\ln(x+2)+\ln(x-5)>3\ln(2)$

Exercice à domicile 2 : ***Résoudre dans*** $\mathbb{R}$ ***les inéquations suivantes :***

$\ln(2-x)<\ln(x)$; $\ln(x+2)+\ln(x-5)<3\ln(2)$; $\ln(-2x+3)<2\ln(x)$

2) Limites fondamentales et la dérivé de la fonction $x\mapsto\ln(U(x))$ *:*

Propriétés

On admet les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to0^+}\ln(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$; $\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln(x)}{x-1}=1$; $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1$

Exercice d'application : ***Calculer les limites suivantes :***

$\lim\limits_{x\to+\infty}6\ln(x)+7x$; $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2)\ln(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln^2x-x^2$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5x-\ln x}{x}$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{\ln x}+1$

$\lim\limits_{x\to+\infty}1+\frac{1}{x}+\ln x$; $\lim\limits_{x\to0^+}1+\ln x$; $\lim\limits_{x\to0^+}2-\ln x$; $\lim\limits_{x\to0^+}4+x\ln x$; $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}-\ln x$

Propriété

Soit f un fonction strictement positive sur I, on a pour tous $x \in I$: $\left(\ln\left(f(x)\right)\right)' = \dfrac{\left(f(x)\right)'}{f(x)}$

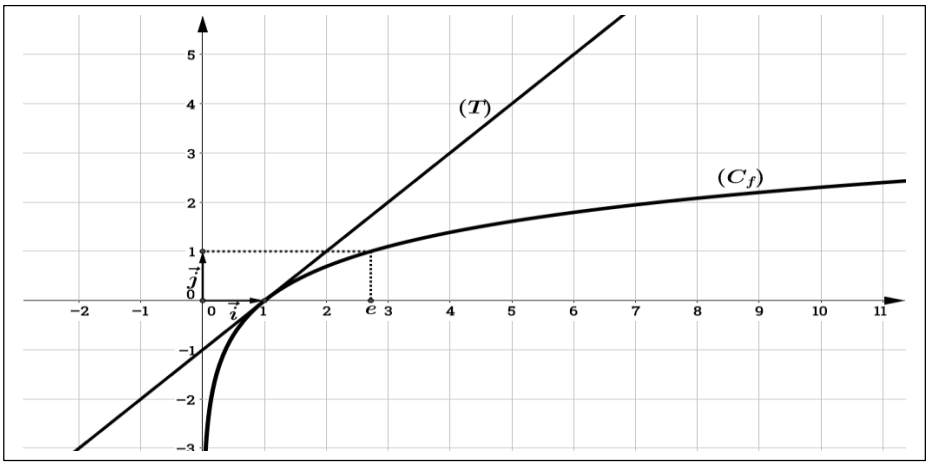
Exercice d'application : ***Déterminer la fonction dérivée de f dans chacune des cas suivants :***

1) $f(x) = \ln(x+3)$; $x \in]-3;+\infty[$; 2) $f(x) = \ln(2x)$; $x \in]0;+\infty[$; 3) $f(x) = x^2 + \ln(x^2)$; $x \in]0;+\infty[$

3) Etude de la fonction logarithme népérien :

Activité : *Soit f la fonction définie par :* $f(x) = \ln(x)$

1) *Déterminer* D_f *l'ensemble de définition de la fonction* f .
2) *Calculer* $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ *puis interpréter les résultats obtenus graphiquement.*
3) *Calculer* $f'(x)$ *,puis dresser le tableau de variation de* f .
4) *Déterminer l'équation de la tangente* (T) *à* (C_f) *au point d'abscisse* $x_0 = 1$.
5) *Construire dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$, (C_f) *la courbe représentative de* f *et la droite* (T).



Remarque :

A partir de la courbe (C_f) on a :

- Si $x \in]0;1]$ on a : (C_f) est en dessous de la droite d'équation $y = 0$ (l'axe des abscisses)
  C'est-à-dire que : $(\forall x \in]0;1])$; $f(x) \le 0$
- Si $x \in [1;+\infty[$ on a : (C_f) est au-dessus de la droite d'équation $y = 0$ (l'axe des abscisses)
  C'est-à-dire que : $(\forall x \in [1;+\infty[)$; $f(x) \ge 0$

On résume le résultat dans le tableau suivant : le tableau de signe de $f(x) = \ln(x)$

x	0		1		$+\infty$
$\ln(x)$	‖	-	0	+	

✍Application :

On considère f *la fonction définie par :* $f(x)=2\ln(x)+1$

1) Déterminer D_f *l'ensemble de définition de la fonction* f .

2) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

3) Calculer $f'(x)$ *,puis dresser le tableau de variation de* f .

4) Construire dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j}),(C_f)$ *la courbe représentative de* f .

II. Fonction logarithme décimale $x\mapsto \log_{10}(x)$

Définition

On appelle fonction logarithme de base 10 *ou tout simplement fonction logarithme décimale la fonction noté* $\log$ *, définie sur* $]0;+\infty[$ *par :* $\log(x)=\dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$

Remarque :

- *La fonction* $x\mapsto \log(u(x))$ *est bien définie si et seulement si* $u(x)>0$.
- $\log(1)=0$ *et* $\log(10)=1$.

Propriétés

Pour tout réel x *et* y *strictement positifs et tout réel on a :*

1/ $\log(xy)=\log(x)+\log(y)$; **2/** $\log\left(\dfrac{x}{y}\right)=\log(x)-\log(y)$; **3/** $\log\left(\dfrac{1}{y}\right)=-\log(y)$

4/ $\log\left(\sqrt{x}\right)=\dfrac{1}{2}\log(x)$; **5/** $\log\left(x^n\right)=n\log(x)$ $;n\in\mathbb{Z}$

Exemple :

$$\log(0,01)+\log(1000)=\log\left(10^{-2}\right)+\log\left(10^3\right)=-2\log(10)+3\log(10)=-2\times1+3\times1=-2+3=1$$

✍Application : *Calculer ce qui suit :*

$\log(0,0002)+\log(0,05)$; $\log(8)+\log(125)$