Chapitre 6

Fonctions logarithmes

Niveau : 2ème Année Bac

PC & SVT

MATHEMATIQUES

~Prof : Bouyguir Taher~

Contenu du chapitre 6

I. La fonction logarithme népérien 1

1. Définition et conséquences 1

2. Propriétés algébriques de la fonction ln 3

3. Limites fondamentales 4

4. Étude de la fonction logarithme népérien 5

4.1. Tableau de variations 5

4.2. Le nombre **e** 5

4.3. Branches infinies 5

4.4. Tangente au point d'abscisse 1 5

4.5. Concavité 5

4.6. Représentation graphique 6

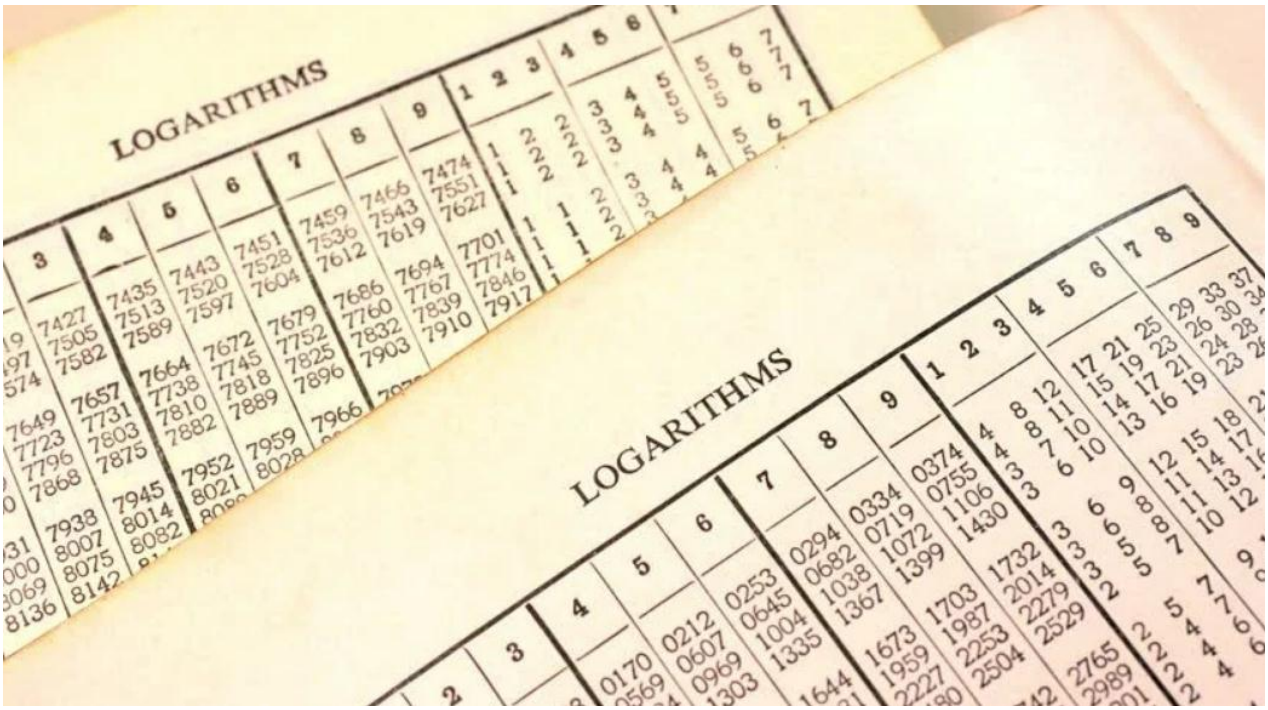
5. Dérivée de la fonction $x \mapsto \ln(u(x))$ 6

II. La fonction logarithme de base a 7

1. La fonction logarithme de base a 7

2. La fonction logarithme décimal 8

3. Étude de la fonction logarithme de base a 8



I. La fonction logarithme népérien

1. Définition et conséquences

Définition 1 :

La fonction **logarithme népérien**, notée ln, est l'unique primitive de la fonction continue $x \mapsto \frac{1}{x}$ définie sur $]0;+\infty[$ qui s'annule en 1.

Conséquences directes :

- L'ensemble de définition de la fonction ln est $]0;+\infty[$, et $\ln(1) = 0$
- La fonction ln est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $\forall x \in]0;+\infty[: \ln' x = (\ln x)' = \frac{1}{x}$
- La fonction ln est continue sur $]0;+\infty[$
- La fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$

Exercice résolu 1 :

Déterminer les domaines de définition des fonctions f, g et h définies par :

$$f(x) = \ln(1-x) \quad ; \quad g(x) = \ln(x^2-1) \quad ; \quad h(x) = \ln\left(\frac{3-x}{x+2}\right)$$

Solution :

- On a : $x \in \mathcal{D}_f \Leftrightarrow 1-x > 0 \Leftrightarrow x < 1$

  Ainsi : $\mathcal{D}_f =]-\infty;1[$.

- On a : $x \in \mathcal{D}_g \Leftrightarrow x^2-1 > 0$;

  Or, le signe de x^2-1 est donné par le tableau de signe ci-contre :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2-1		+	0	−	0	+	

  On en déduit ainsi que : $\mathcal{D}_g =]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$.

- On a : $x \in \mathcal{D}_h \Leftrightarrow \frac{3-x}{x+2} > 0$ et $x+1 \neq 0$

  Or, le signe de $\frac{3-x}{x+2}$ est donné par le tableau de signe ci-contre :

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$3-x$		+	||	+	0	−	
$x+2$		−	0	+	||	+	
$\frac{3-x}{x+2}$		−	||	+	0	−	

  On en déduit ainsi que : $\mathcal{D}_h =]-2;3[$.

Propriété 1 :

Soient x et y deux réels strictement positifs, on a :

- $x = y \Leftrightarrow \ln x = \ln y$
- $x < y \Leftrightarrow \ln x < \ln y$

Cas particuliers :

❋ $\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ❋ $\ln x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$ ❋ $\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$

ainsi, nous en déduisons le tableau de signe de la fonction ln :

x	0		1		$+\infty$
Signe de $\ln x$	‖	$-$	0	$+$	

Exercice résolu 2 :

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\ln(3x-1) = \ln(1-x)$ **b)** $\ln(2x-3) = \ln(4x-1)$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $\ln(2x-3) \leq \ln(x-1)$ **b)** $\ln(x+1) - \ln(3-x) > 0$

Solution :

1) a) Résolvons l'équation $\ln(3x-1) = \ln(1-x)$

Cette équation est définie si et seulement si : $3x-1>0$ et $1-x>0$

La première inéquation donne $x > \frac{1}{3}$, et la deuxième donne $x < 1$

d'où le domaine de définition de l'équation est $\left]\frac{1}{3}; 1\right[$

On restreint donc la recherche des solutions à cet intervalle

Soit $x \in \left]\frac{1}{3}; 1\right[$, on a : $\ln(3x-1) = \ln(1-x) \Leftrightarrow 3x-1 = 1-x$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

Cette solution appartient à l'intervalle $\left]\frac{1}{3}; 1\right[$, donc : $\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

b) Résolvons l'équation $\ln(2x-3) = \ln(4x-1)$

Cette équation est définie si et seulement si $2x-3>0$ et $4x-1>0$

La première inéquation donne $x > \frac{3}{2}$ et la deuxième donne $x > \frac{1}{4}$

donc le domaine de définition de l'équation est $\left]\frac{3}{2}; +\infty\right[$

Soit $x \in \left]\frac{3}{2}; +\infty\right[$, on a : $\ln(2x-3) = \ln(4x-1) \Leftrightarrow 2x-3 = 4x-1$

$\Leftrightarrow x = -1$

Cette solution n'appartient pas à l'intervalle $\left]\frac{3}{2}; +\infty\right[$

donc l'équation n'a pas de solution.

2) a) Résolvons l'inéquation $\ln(2x-3) \leq \ln(x-1)$

Cette inéquation est définie si et seulement si : $2x-3>0$ et $x-1>0$

La première inéquation donne $x>\frac{3}{2}$ et la deuxième donne $x>1$

donc le domaine de définition de l'inéquation est $\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$

Soit $x \in \left]\frac{3}{2};+\infty\right[$, on a : $\ln(2x-3) \leq \ln(x-1) \Leftrightarrow 2x-3 \leq x-1$

$\Leftrightarrow x \leq 2$

Donc l'ensemble des solutions de cette inéquation est :

$$\mathcal{S} = \left]\frac{3}{2};+\infty\right[\cap]-\infty;2] = \left]\frac{3}{2};2\right]$$

b) Résolvons l'inéquation $\ln(x+1)-\ln(3-x)>0$

Cette inéquation est définie si et seulement si : $x+1>0$ et $3-x>0$

La première inéquation donne $x>-1$ et la deuxième donne $x<3$

donc le domaine de définition de l'inéquation est $]-1;3[$

Soit $x \in]-1;3[$, on a : $\ln(x+1)-\ln(3-x)>0 \Leftrightarrow \ln(x+1)>\ln(3-x)$

$\Leftrightarrow x+1>3-x$

$\Leftrightarrow x>1$

Donc l'ensemble des solutions de cette inéquation est :

$$\mathcal{S} =]-1;3[\cap]1;+\infty[=]1;3[$$

2. Propriétés algébriques de la fonction ln

Propriété 2 :

Pour tous réels strictement positifs x et y et pour tout $r \in \mathbb{Q}$, on a :

- $\ln(xy) = \ln x + \ln y$
- $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$
- $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$
- $\ln\sqrt{x} = \frac{1}{2}\ln x$
- $\ln(x^r) = r\ln x$

En résumé, le logarithme népérien a la particularité de transformer les produits en sommes, les quotients en différences et les puissances en multiplications.

Application 1 :

1) Exprimer en fonction de $\ln 2$ et $\ln 3$ les réels suivants :

- $\ln 24$
- $\ln 36$
- $\ln(9^{2021})$
- $\ln\dfrac{2}{\sqrt{3}}$
- $\ln\dfrac{\sqrt[3]{6}}{4}$
- $\ln\sqrt{3-\sqrt{3}}+\ln\sqrt{3+\sqrt{3}}$

2) Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $2^n \geq 2121$

Remarques :

- Si : $xy > 0$, alors :

$$\ln(xy) = \ln|x| + \ln|y| \qquad \text{et} \qquad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln|x| - \ln|y|$$

- Si : $x \in \mathbb{R}^*$, alors : $\ln(x^2) = 2\ln|x|$

3. Limites fondamentales

Propriété 3 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

- $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} x^n \ln x = 0$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = 0$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1} = 1$

Application 2 :

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 0^+} (3x^2-4)\ln x$; $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln\left(\dfrac{x+2}{3x-4}\right)$; $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3\ln x + x}{\ln x - x}$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x-1}$; $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(x^2-x+3)}{x}$; $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\ln(1-x^3)}{x}$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(x^4)}{x^6}$; $\lim\limits_{x\to 0^+} \sin x \cdot \ln(x^9)$; $\lim\limits_{x\to +\infty} x - \ln(1+x^2)$

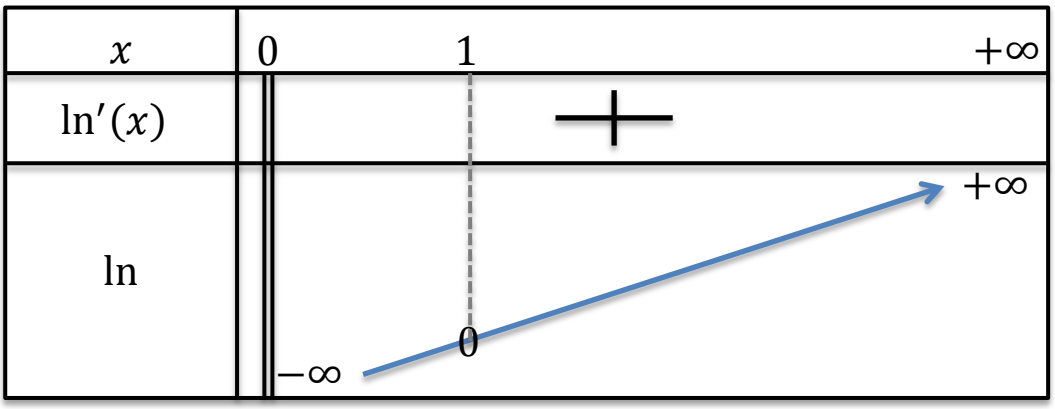
$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x\ln x}$; $\lim\limits_{x\to +\infty} (\ln x)^2 - \ln x$; $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

$\lim\limits_{x\to 0^+} x(\ln x)^2$; $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{(\ln x)3}{x}$; $\lim\limits_{x\to +\infty} x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$

4. Étude de la fonction logarithme népérien

4.1. Tableau de variations

On peut résumer les variations et les limites de la fonction ln, dans le tableau ci-dessous :



4.2. Le nombre e

- L'équation $\ln x = 1$ admet une solution unique dans $]0;+\infty[$. On la note : e
  Donc : $\ln x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = e$
- Le nombre e est irrationnel, et sa valeur approchée est : $e \simeq 2{,}71828$
- Pour tout nombre rationel k on a : $\ln(e^k) = k$

4.3. Branches infinies

- Puisque : $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$

  Alors l'axe des ordonnées est une asymptote à la courbe représentative de ln
- Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

  Alors la courbe représentative de la fonction ln admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$

4.4. Tangente au point d'abscisse 1

L'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de la fonction logarithme népérien au point $A(1;0)$ est : $y = x - 1$

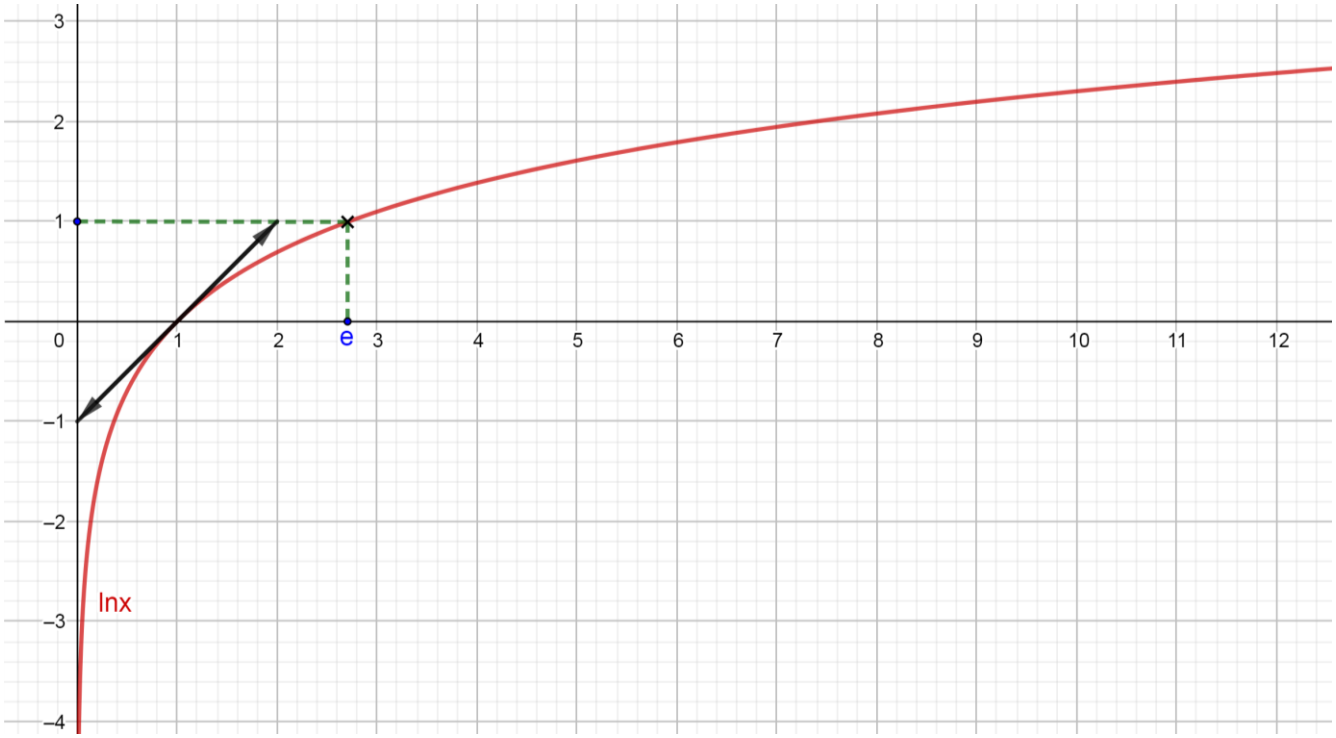
4.5. Concavité

Pour tout $x \in]0;+\infty[$: $(\ln x)'' = -\dfrac{1}{x^2}$

alors la courbe représentative de ln est concave sur $]0;+\infty[$

4.6. Représentation graphique

Voici le graphe de la fonction logarithme népérien.



5. Dérivée de la fonction $x \mapsto \ln(u(x))$

Propriété 4 :

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I tel que u ne s'annule pas sur I,

Alors la fonction $f: x \mapsto \ln|u(x)|$ est dérivable sur I, et pour tout $x \in I$, on a :

$$f'(x) = (\ln|u(x)|)' = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Exemple :

La fonction u définie par $u(x) = x^2 + x + 1$ est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc $\ln(u(x))$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et

$$[\ln(x^2 + x + 1)]' = \frac{(x^2 + x + 1)'}{x^2 + x + 1} = \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1}$$

Conséquence :

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I tel que u ne s'annule pas sur I,

Les fonctions primitives de la fonction $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$ sur I, sont les fonctions définies par : $\ln|u(x)| + c$, où c est une constante réelle.

Application 3 :

Déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle I dans les cas suivants :

1. $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-2x}$; $I =]2;+\infty[$
2. $f(x) = \tan x$; $I = \left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$
3. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$; $I =]-\infty;1[$

II. La fonction logarithme de base a

1. La fonction logarithme de base a

Définition 2 :

Soit a un nombre réel strictement positif et différent de 1.

La fonction **logarithme de base a**, notée $\log_a$, est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par

$$\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Remarques :

- La fonction logarithme de base e, est la fonction logarithme népérien ;

  En effet, $\forall x \in]0;+\infty[: \log_e(x) = \dfrac{\ln x}{\ln e} = \ln x$

- On a : $\log_a(1) = 0$ et $\log_a(a) = 1$ et $\forall r \in \mathbb{Q} : \log_a(a^r) = r$

- Les propriétés de la fonction $\log_a$ sont les mêmes que celles de la fonction ln.

Propriété 5 :

Soit a un nombre réel strictement positif et différent de 1.

Pour tout réels strictement positifs x et y et pour tout $r \in \mathbb{Q}$, on a :

- $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$
- $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$
- $\log_a\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\log_a(x)$
- $\log_a(x^r) = r\log_a(x)$

Application 4 :

Simplifier les nombres suivants :

$$A = \log_2\left(\sqrt{8}\right) ; \quad B = \log_{\frac{1}{2}}(2^4) ; \quad C = \log_2(64) - \log_3(81) + \log_5\left(\frac{1}{125}\right)$$

2. La fonction logarithme décimal

Définition 3 :

La fonction **logarithme décimal**, notée log, est la fonction logarithme de base 10;

et on a : $\forall x \in]0;+\infty[: \log(x) = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$

Remarque :

Pour tout $x > 0$ et pour tout $y \in \mathbb{Z}$, on a :

$$\log(x) = y \iff x = 10^y \quad \text{ou encore} \quad \log(10^y) = y$$

Application 5 :

Simplifier les nombres suivants :

$A = \log(100000)$; $B = \log(0{,}0001)$

$C = \log(100) - \log(0{,}001) + \log\left(\dfrac{1}{1000000}\right)$

3. Étude de la fonction logarithme de base a

Soit a un nombre réel strictement positif et diffèrent de 1.

La fonction $\log_a$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et on a :

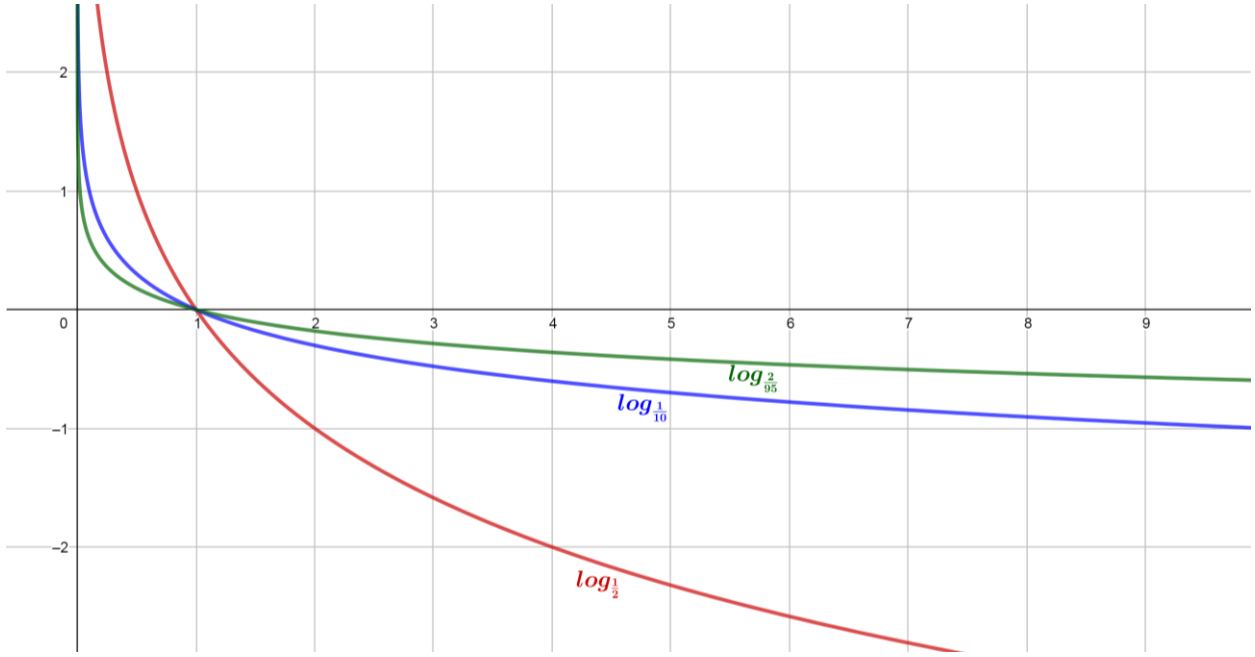
$$\forall x \in]0;+\infty[: (\log_a)'(x) = \frac{1}{x \ln a}$$

➤ Si : $\mathbf{0 < a < 1}$

alors $(\log_a)'(x) < 0$, donc $\log_a$ est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.

Tableau de variation et la courbe :

x	0	1	$+\infty$
$(\log_a)'(x)$	‖	—	
$\log_a$	‖ $+\infty$	0 ↘	$-\infty$



➤ Si : $\boldsymbol{a > 1}$ *alors* $(\log_a)'(x) > 0$, donc $\log_a$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

Tableau de variation et la courbe :

x	0	1	$+\infty$
$(\log_a)'(x)$	‖	$+$	
$\log_a$	$-\infty$ ‖	0 ↗	$+\infty$

