Prof. Taher Bouyguir

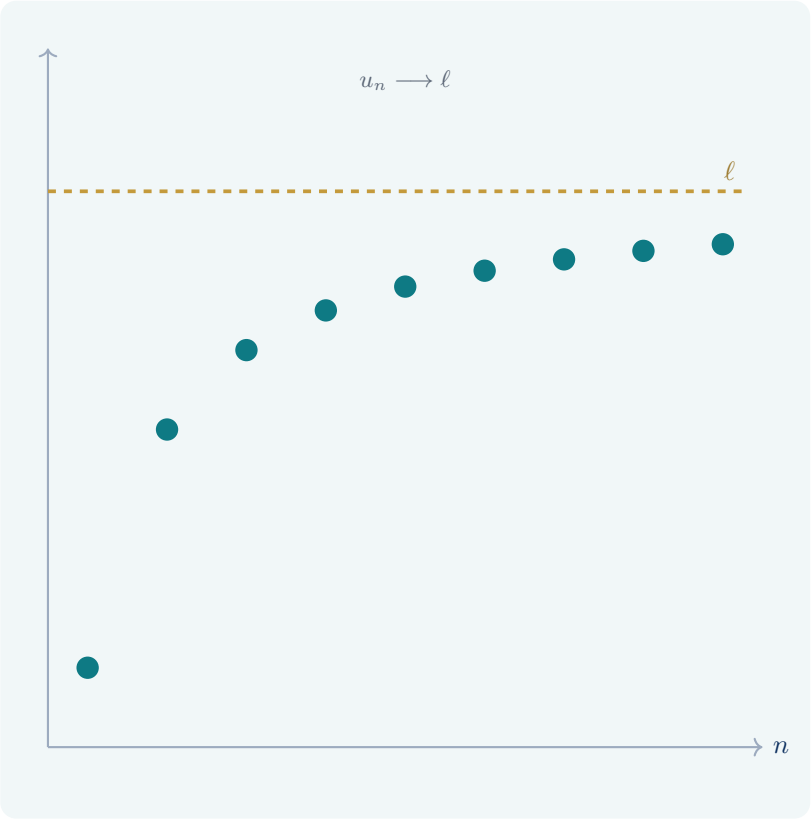
Professeur de mathématiques
Secondaire qualifiant

Prof Taher
Prof Taher Bouyguir
Taher Bouyguir
Contact WhatsApp
Telegram
mr.bouyguir@gmail.com
www.proftaher.com

1ère Spé Maths

CHAPITRE 9

Généralités sur les suites



Cours et corrigés des applications

9
Cours

Généralités sur les suites

Capacités attendues

- Proposer, modéliser une situation permettant de générer une suite de nombres.
- Calculer les premiers termes d'une suite définie explicitement ou par récurrence.
- Représenter graphiquement les premiers termes d'une suite.
- Déterminer le sens de variation d'une suite.
- À l'aide d'algorithmes, obtenir une liste de termes, un terme de rang donné ou une somme.
- Déterminer un seuil à l'aide d'un graphique, d'une calculatrice ou d'un logiciel.
- Conjecturer, dans des cas simples, la limite éventuelle d'une suite.

Prérequis : fonctions et images, variations d'une fonction (Chap 8), pourcentages et coefficients multiplicateurs, bases de Python (variables, boucles `for` et `while`).

Table des matières

I Notion de suite numérique . . . 3
1 Définition . . . 3
2 Suite définie de façon explicite . . . 3
3 Suite définie par récurrence . . . 3
II Représentation graphique . . . 5
III Sens de variation d'une suite . . . 6
IV Algorithmes avec Python . . . 8
V Seuil et limite d'une suite . . . 10
Corrigés des applications . . . 12

I Notion de suite numérique

1 Définition

Définition 1 : suite numérique

Une **suite numérique** u est une fonction qui, à tout entier naturel n (éventuellement à partir d'un certain rang), associe un nombre réel noté u_n.

- u_n est le **terme de rang** n (ou terme d'indice n) ; la suite se note (u_n).
- Si la suite commence à $n = 0$, son premier terme est u_0 ; le terme u_n est alors le $(n+1)$-ième terme.

Exemple : modéliser une situation

- Un capital de $1\,000$ € est placé à $2\,\%$ par an. Le capital après n années est C_n : $C_0 = 1000$ et $C_{n+1} = 1{,}02\,C_n$ (multiplier par $1{,}02$ revient à augmenter de $2\,\%$).
- Avec des allumettes, on construit une rangée de n carrés accolés : il faut $u_n = 3n + 1$ allumettes.

2 Suite définie de façon explicite

Définition 2 : forme explicite

Une suite est définie **de façon explicite** lorsque $u_n = f(n)$, où f est une fonction : on calcule directement n'importe quel terme à partir de son rang.

Exemple

$u_n = n^2 - 2n$: $u_0 = 0$, $u_1 = -1$, $u_2 = 0$, $u_3 = 3$, $u_{10} = 80$.
Pour $v_n = 2n + 3$: $v_{n+1} = 2(n+1) + 3 = 2n + 5$; $v_{2n} = 4n + 3$; $v_n + 1 = 2n + 4$. **Attention :** v_{n+1} et $v_n + 1$ sont différents !

3 Suite définie par récurrence

Définition 3 : relation de récurrence

Une suite est définie **par récurrence** lorsqu'on donne son premier terme et une relation permettant de calculer chaque terme à partir du précédent, par exemple : u_0 donné et $u_{n+1} = f(u_n)$.

Exemple

$u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 3u_n - 1$: $u_1 = 3 \times 2 - 1 = 5$, $u_2 = 3 \times 5 - 1 = 14$, $u_3 = 41$.
Pour calculer u_{10}, il faut calculer tous les termes précédents (d'où l'intérêt d'un algorithme).

Application 1

1. Soit $u_n = \dfrac{n+1}{n+2}$. Calculer u_0, u_1, u_2, u_3, puis exprimer u_{n+1} en fonction de n.
2. Soit $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = v_n^2 - 1$. Calculer v_1, v_2, v_3.
3. Soit $w_0 = 0$ et $w_{n+1} = w_n + 2n + 1$. Calculer w_1 à w_4. Que peut-on conjecturer ?

Ma réponse :

Application 2

(Modéliser) Un club compte 200 membres en 2025. Chaque année, $10\,\%$ des membres partent et 30 nouveaux arrivent. On note u_n le nombre de membres en $2025 + n$.

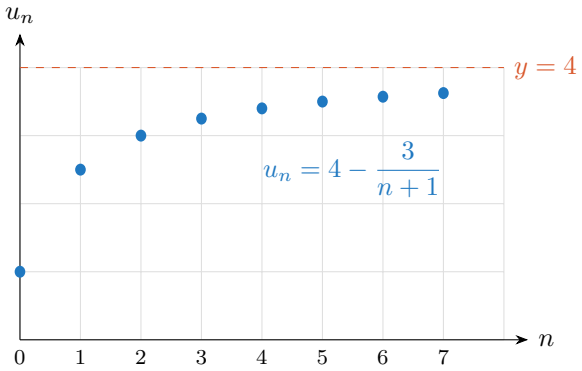
1. Justifier que $u_{n+1} = 0{,}9\,u_n + 30$.
2. Calculer u_1, u_2 et u_3.

Ma réponse :

II Représentation graphique

Définition 4 : nuage de points

Dans un repère, la représentation graphique d'une suite (u_n) est l'ensemble des points de coordonnées $(n\,;u_n)$. Ces points **ne se relient pas** : n ne prend que des valeurs entières.

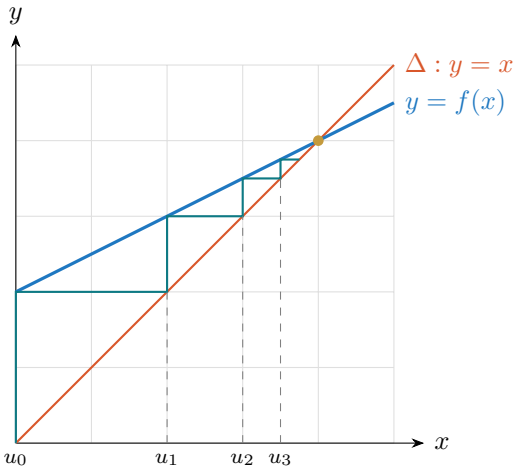


Méthode : représenter une suite $u_{n+1}=f(u_n)$: la méthode « en escalier »

1. Tracer la courbe de f et la droite $\Delta : y=x$.
2. Placer u_0 sur l'axe des abscisses ; l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse u_0 est $u_1=f(u_0)$.
3. Rapporter u_1 sur l'axe des abscisses grâce à la droite Δ, puis recommencer pour obtenir u_2, u_3…

Exemple

$u_0=0$ et $u_{n+1}=0{,}5\,u_n+2$, donc $f(x)=0{,}5x+2$: $u_1=2$, $u_2=3$, $u_3=3{,}5$, $u_4=3{,}75$…



Les termes semblent se rapprocher de 4, abscisse du point d'intersection de la courbe et de Δ.

Application 3

Soit $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = 0{,}5\,u_n + 1$. Calculer u_1, u_2, u_3, puis représenter ces termes sur l'axe des abscisses par la méthode en escalier (tracer la droite d'équation $y = 0{,}5x + 1$ et la droite $y = x$ pour $x \in [0\,;5]$). Que peut-on conjecturer ?

Ma réponse :

III Sens de variation d'une suite

Définition 5 : suite croissante, décroissante

- (u_n) est **croissante** si, pour tout n, $u_{n+1} \geqslant u_n$;
- (u_n) est **décroissante** si, pour tout n, $u_{n+1} \leqslant u_n$;
- (u_n) est **constante** si, pour tout n, $u_{n+1} = u_n$.

Avec des inégalités strictes, on parle de suite strictement croissante ou décroissante. Une suite croissante ou décroissante est dite **monotone**.

Méthode : étudier le sens de variation

1. **Différence :** on étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$ (positif : croissante ; négatif : décroissante).
2. **Quotient :** si tous les termes sont **strictement positifs**, on compare $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 (supérieur à 1 : croissante ; inférieur à 1 : décroissante).

3 **Fonction associée :** si $u_n = f(n)$ et si f est croissante (resp. décroissante) sur $[0\,;+\infty[$, alors (u_n) est croissante (resp. décroissante).

Exemple

- $u_n = n^2 + n$: $u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 + (n+1) - n^2 - n = 2n + 2 > 0$: (u_n) est strictement croissante.
- $v_n = \dfrac{3}{2^n} > 0$: $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{3}{2^{n+1}} \times \dfrac{2^n}{3} = \dfrac{1}{2} < 1$: (v_n) est strictement décroissante.
- $w_n = \dfrac{1}{n+1} = f(n)$ avec $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$, décroissante sur $[0\,;+\infty[$: (w_n) est décroissante.
- $t_0 = 5$ et $t_{n+1} = t_n - n^2 - 1$: $t_{n+1} - t_n = -n^2 - 1 < 0$: (t_n) est strictement décroissante.

Remarque

Une suite peut n'être ni croissante ni décroissante : par exemple $u_n = (-1)^n$ vaut $1, -1, 1, -1\ldots$

Application 4

Étudier le sens de variation des suites suivantes :

1. $u_n = n^2 - 4n$ (attention aux premiers termes) ;
2. $v_n = 5 \times 0{,}8^n$;
3. $w_0 = 1$ et $w_{n+1} = w_n + \dfrac{1}{n+1}$;
4. $t_n = \dfrac{2n+1}{n+1}$ (on pourra écrire $t_n = 2 - \dfrac{1}{n+1}$).

Ma réponse :

IV Algorithmes avec Python

On prend l'exemple de la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 3u_n - 1$.

Méthode : terme de rang n et liste des termes

Terme de rang n :

```
def terme(n):
    u = 2
    for i in range(n):
        u = 3*u - 1
    return u
```

`terme(3)` renvoie 41.

Liste des termes u_0 à u_n :

```
def liste(n):
    u = 2
    L = [u]
    for i in range(n):
        u = 3*u - 1
        L.append(u)
    return L
```

`liste(3)` renvoie `[2, 5, 14, 41]`.

Méthode : somme et seuil

Somme $u_0 + u_1 + \cdots + u_n$:

```
def somme(n):
    u = 2
    S = u
    for i in range(n):
        u = 3*u - 1
        S = S + u
    return S
```

`somme(3)` renvoie $2 + 5 + 14 + 41 = 62$.

Seuil : plus petit n tel que $u_n > 1000$:

```
def seuil(A):
    n = 0
    u = 2
    while u <= A:
        u = 3*u - 1
        n = n + 1
    return n
```

`seuil(1000)` renvoie 6 ($u_5 = 365$, $u_6 = 1094$).

Remarque

À la calculatrice : le mode « Suites » (ou « Récurrence ») permet d'entrer $u_{n+1} = 3u_n - 1$ et $u_0 = 2$, puis d'afficher le **tableau de valeurs** : on y lit les termes et on repère un seuil. On peut aussi afficher le nuage de points.

Application 5

Soit $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n + 3$.

1. Écrire une fonction Python `terme(n)` qui renvoie u_n. Calculer u_5.
2. Écrire une fonction Python qui renvoie le plus petit entier n tel que $u_n > 10\,000$. Quelle valeur renvoie-t-elle ?

Ma réponse :

Application 6

Écrire une fonction Python `somme(n)` qui renvoie $S_n = 0^2 + 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$. Que renvoie `somme(10)` ?

Ma réponse :

V Seuil et limite d'une suite

Définition 6 : limite d'une suite, approche intuitive

- Si les termes u_n se rapprochent autant qu'on veut d'un réel ℓ quand n devient grand, on dit que la suite **converge** vers ℓ (ou tend vers ℓ).
- Si les termes deviennent aussi grands qu'on veut, on dit que la suite tend vers $+\infty$ (de même pour $-\infty$).
- Une suite peut aussi n'avoir aucune limite.

Exemple

- $u_n = 4 - \dfrac{3}{n+1}$: $u_{100} \approx 3{,}97$, $u_{1000} \approx 3{,}997$: on conjecture que (u_n) converge vers 4.
- $v_n = n^2$: les termes deviennent aussi grands qu'on veut : (v_n) tend vers $+\infty$.
- $w_n = (-1)^n$ oscille entre -1 et 1 : pas de limite.

Méthode : déterminer un seuil

On cherche le plus petit n tel que u_n dépasse (ou passe sous) une valeur donnée :

- **graphiquement** : on trace la droite horizontale correspondante et on lit le premier point au-delà ;
- **à la calculatrice** : on parcourt le tableau de valeurs ;
- **avec Python** : boucle `while` (partie IV) ;
- parfois **par le calcul**, en résolvant une inéquation.

Application 7

Soit $u_n = \dfrac{2n+1}{n+3}$.

1. Calculer à la calculatrice u_{10}, u_{100} et u_{1000}. Conjecturer la limite de (u_n).
2. Déterminer par le calcul le plus petit entier n tel que $u_n > 1{,}9$.

Ma réponse :

Application 8

(Synthèse) On reprend le club de l'application 2 : $u_0 = 200$ et $u_{n+1} = 0{,}9\,u_n + 30$.

1. Écrire une fonction Python qui renvoie u_n.
2. À l'aide de la calculatrice, conjecturer la limite de (u_n). Vérifier que ce nombre ℓ vérifie $\ell = 0{,}9\,\ell + 30$.
3. On admet que $u_n = 300 - 100 \times 0{,}9^n$. Étudier le sens de variation de (u_n).
4. À partir de quelle année le club comptera-t-il au moins 290 membres ?

Ma réponse :

Corrigés des applications

Corrigé de l'application 1

1. $u_0 = \frac{1}{2}$, $u_1 = \frac{2}{3}$, $u_2 = \frac{3}{4}$, $u_3 = \frac{4}{5}$; $u_{n+1} = \dfrac{n+2}{n+3}$.
2. $v_1 = 1^2 - 1 = 0$, $v_2 = 0^2 - 1 = -1$, $v_3 = (-1)^2 - 1 = 0$.
3. $w_1 = 0 + 1 = 1$, $w_2 = 1 + 3 = 4$, $w_3 = 4 + 5 = 9$, $w_4 = 9 + 7 = 16$: on conjecture $w_n = n^2$.

Corrigé de l'application 2

1. $10\,\%$ partent : il reste $90\,\%$ des membres, soit $0{,}9\,u_n$; on ajoute les 30 arrivées : $u_{n+1} = 0{,}9u_n + 30$.
2. $u_1 = 0{,}9 \times 200 + 30 = 210$; $u_2 = 0{,}9 \times 210 + 30 = 219$; $u_3 = 0{,}9 \times 219 + 30 = 227{,}1$.

Corrigé de l'application 3

$u_1 = 0{,}5 \times 4 + 1 = 3$; $u_2 = 2{,}5$; $u_3 = 2{,}25$. Sur le graphique en escalier, les termes descendent vers l'abscisse du point d'intersection des deux droites : $0{,}5x + 1 = x \iff x = 2$. On conjecture que (u_n) est décroissante et converge vers 2.

Corrigé de l'application 4

1. $u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - 4(n+1) - n^2 + 4n = 2n - 3$: négatif pour $n = 0$ et $n = 1$, positif pour $n \geqslant 2$. ($u_0 = 0$, $u_1 = -3$, $u_2 = -4$, $u_3 = -3$.) La suite n'est pas monotone, mais elle est croissante à partir du rang 2.
2. $v_n > 0$ et $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = 0{,}8 < 1$: (v_n) est strictement décroissante.
3. $w_{n+1} - w_n = \dfrac{1}{n+1} > 0$: (w_n) est strictement croissante.
4. $2 - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{2n+2-1}{n+1} = t_n$. La fonction $f(x) = 2 - \dfrac{1}{x+1}$ a pour dérivée $\dfrac{1}{(x+1)^2} > 0$: elle est croissante sur $[0\,;+\infty[$, donc (t_n) est croissante.

Corrigé de l'application 5

1.

```
def terme(n):
    u = 1
    for i in range(n):
        u = 2*u + 3
    return u
```

Termes : 1, 5, 13, 29, 61, 125 : $u_5 = 125$.

2

```
def seuil():
    n = 0
    u = 1
    while u <= 10000:
        u = 2*u + 3
        n = n + 1
    return n
```

Suite des termes : …, $u_{11} = 8189$, $u_{12} = 16381$.
La fonction renvoie 12.

✔ Corrigé de l'application 6

```
def somme(n):
    S = 0
    for k in range(n+1):
        S = S + k**2
    return S
```

somme(10) renvoie $0+1+4+9+\cdots+100 = 385$.

✔ Corrigé de l'application 7

1 $u_{10} = \frac{21}{13} \approx 1{,}615$; $u_{100} = \frac{201}{103} \approx 1{,}951$; $u_{1000} = \frac{2001}{1003} \approx 1{,}995$: on conjecture que (u_n) converge vers 2.

2 $n+3 > 0$, donc $u_n > 1{,}9 \iff 2n+1 > 1{,}9(n+3) \iff 2n+1 > 1{,}9n+5{,}7 \iff 0{,}1n > 4{,}7 \iff n > 47$. Le plus petit entier est $n = 48$.

✔ Corrigé de l'application 8

1

```
def club(n):
    u = 200
    for i in range(n):
        u = 0.9*u + 30
    return u
```

2 Le tableau de valeurs montre des termes qui se rapprochent de 300. Et $0{,}9 \times 300 + 30 = 300$. ✓

3 $u_{n+1} - u_n = -100 \times 0{,}9^{n+1} + 100 \times 0{,}9^n = 100 \times 0{,}9^n(1 - 0{,}9) = 10 \times 0{,}9^n > 0$: (u_n) est croissante.

4 $u_n \geqslant 290 \iff 100 \times 0{,}9^n \leqslant 10 \iff 0{,}9^n \leqslant 0{,}1$. À la calculatrice : $0{,}9^{21} \approx 0{,}109$ et $0{,}9^{22} \approx 0{,}098$. Donc $n = 22$: à partir de $2025 + 22 = 2047$.