Généralité sur les fonctions

Niveau : Première année baccalauréat Sciences économiques

Professeur : Taher BOUYGUIR

November12,2022

Table de matière

1. Fonction numérique **2**

1.1 Définition . . . 2

1.2 Domaine de définition . . . 2

1.3 Comparaison de fonctions . . . 3

2. Fonction majorée - Fonction minorée - Fonction bornée **4**

3. Parité de fonction **6**

4. Variation d'une fonction **7**

4.1 Taux de variation . . . 7

4.2 Variation d'une fonctions . . . 7

4.3 Parité et variation . . . 8

5. Composition de fonctions **8**

5.1 Composition de deux fonctions . . . 8

5.2 Sens de variation de composition de deux fonctions . . . 9

6. Fonctions de référence **9**

6.1 La fonctions $\sqrt{x+a}$ . . . 9

6.2 La fonction αx^3 . . . 10

1. Fonction numérique

1.1 Définition

Définition

Une fonction numérique f d'une variable réelle x est une relation qui à un nombre réel x associe un unique réel y noté $f(x)$. On écrit alors :

$$\begin{aligned} f: \ I &\longrightarrow J \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

Et on dit que :

- $f(x)$ est l'image de x par la fonction f.
- x est l'antécédent de $f(x)$ par la fonction f.
- I est l'ensemble de départ de la fonction f.
- J est l'ensemble d'arrivé de la fonction f.

Remarque

- Il faut faire la différence entre la fonction f qui représente une relation et $f(x)$ qui représente l'image de x par f qui est un nombre réel.

Exemple

- $f(x) = 2x + 1$ est une fonction affine.
- $f(x) = -6x^2 + 3x - 1$ est une fonction de seconde degré.
- $f(x) = \dfrac{x-1}{2x+3}$ est une fonction homographique.

1.2 Domaine de définition

Définition

Domaine de définition ou l'ensemble de définition d'une fonction f est l'ensemble des valeurs de la variable x pour lesquelles la fonction est définie.

Exemple

- La fonction f définie par $f(x) = \sqrt{3x+6}$ sur $[-2, +\infty[$. Parce-que :

$$\begin{aligned} D_f &= \{x \in \mathbb{R} / 3x + 6 \succeq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / x \succeq -2\} \\ &= [-2, +\infty[\end{aligned}$$

- La fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x+1}$ sur $]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$. Parce-que :

$$\begin{aligned} D_f &= \{x \in \mathbb{R}/x+1 \neq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}/x \neq -1\} \\ &=]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[\end{aligned}$$

- La fonction f définie par $f(x) = -5x^3+2x^2+1$ sur $\mathbb{R}$. Parce-que pour tout $x \in \mathbb{R}$ la fonction est bien définie.

Exercice d'application

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

$$f(x) = \sqrt{x^2-1} \quad :: \quad f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-5x+6} \quad :: \quad f(x) = x^3+2x-1 \quad :: \quad f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x^2-1}$$

1.3 Comparaison de fonctions

Définition

On dit que deux fonctions f et g sont égales si seulement si :

1. Elles ont même ensemble de définition : $D_f = D_g$.
2. $\forall x \in D_f, \quad f(x) = g(x)$

Exemple

Soit les deux fonctions : $g(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}$ et $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$.

On a $D_f = \left\{x \in \mathbb{R}, \dfrac{x-1}{x+1} \succeq 0 \quad et \quad x+1 \neq 0\right\} =]-\infty,-1[\cup[1,+\infty[$.

et $D_g = \{x \in \mathbb{R}, x-1 \succeq 0 \quad et \quad x+1 \succ 0\} = [1,+\infty[$.

Puisque que $D_f \neq D_g$, Alors les fonctions f et g ne sont pas égales.

Définition

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I. On dit que sur I :

- f est inférieure à g, et on note, $f \prec g$ si seulement si : $\forall x \in f(x) \prec g(x)$. Et on interprète graphiquement que la courbe de la fonction f est en dessous de celle de g.
- f est supérieure à g, et on note, $f \succ g$ si seulement si : $\forall x \in f(x) \succ g(x)$. Et on interprète graphiquement que la courbe de la fonction f est en dessus de celle de g.
- f est positive, et on note, $f \succ g$ si seulement si : $\forall x \in f(x) \succ 0$. Et on interprète graphiquement que la courbe de la fonction f est en dessus de l'axe des abscisse.

- f est négatif, et on note, $f \prec g$ si seulement si : $\forall x \in f(x) \prec 0$. Et on interprète graphiquement que la courbe de la fonction f est en dessous de l'axe des abscisse.

2. Fonction majorée - Fonction minorée - Fonction bornée

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- On dit que f est minorée sur I, s'il existe un nombre réel m, tel que : $\forall x \in I, f(x) \succeq m$.
- On dit que f est majorée sur I, s'il existe un nombre réel M, tel que : $\forall x \in I, f(x) \preceq M$.
- On dit que f est bornée sur I, si elle est majorée et minorée sur I. c-à-d s'il existe deux nombre m et M tel que : $\forall x \in I, m \preceq f(x) \preceq M$

Exemple

- La fonction $f(x) = x^2 - 4x + 5$ est minorée par 1 sur $\mathbb{R}$, parce que :

$$\begin{aligned} f(x) - 1 &= x^2 - 4x + 5 - 1 \\ &= x^2 - 4x + 4 \\ &= (x-2)^2 \succeq 0 \end{aligned}$$

  Donc $f(x) \succeq 1$.

- La fonction $f(x) = \dfrac{x^2}{x-2}$ est minorée par 0 sur $]-\infty, 2[$, parce que :

$$\forall x \in]-\infty, 2[, \quad x - 2 \preceq 0, et \quad \forall x \in]-\infty, 2[x^2 \succeq 0.$$

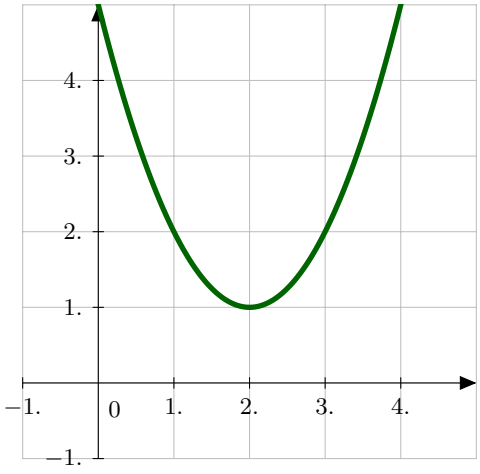
  Alors $\dfrac{x^2}{x-2} \preceq 0$
  Donc $f(x) \preceq 0$

Remarque

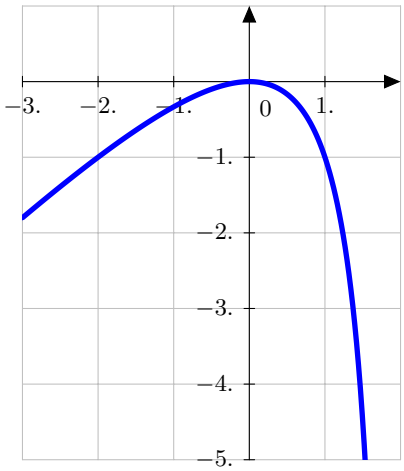
- L'interprétation graphique de f est minorée par m est que la courbe de la fonction f est au dessus de la droite $y = m$.
- L'interprétation graphique de f est majorée par M est que la courbe de la fonction f est au dessous de la droite $y = M$.

Exemple

- Dans l'exemple précédant nous avons montré que la fonction $f(x) = x^2 - 4x + 5$ est minorée par 1, la représentation graphique de la fonction f montre que la courbe est au dessus de la droite $y = 1$.



- Dans l'exemple précédant nous avons montré que la fonction $f(x) = \dfrac{x^2}{x-2}$ est majorée par 0 sur $]-\infty, 2[$, la représentation graphique de la fonction f montre que la courbe est au dessous de la droite $y = 0$ (l'axe des abscisses)



Exercice d'application

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}$.

1. Montrer que f est majorée sur $\mathbb{R}$ par $\dfrac{3}{2}$.
2. Montrer que f est minorée sur $\mathbb{R}$ par $\dfrac{1}{2}$.
3. Déduire que f est bornée sur $\mathbb{R}$.

Propriété

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que :

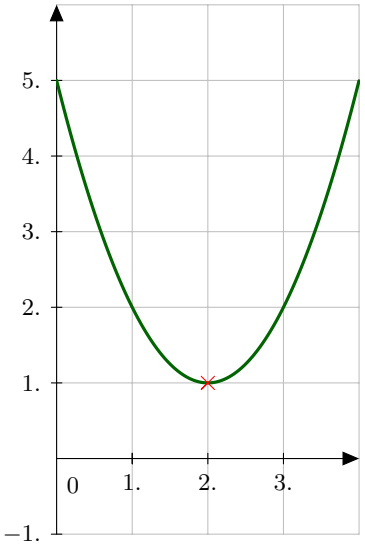
- f admet un maximum x_M si, seulement si : $\forall x \in I, \quad f(x) \preceq f(x_M)$.
- f admet un minimum x_m si, seulement si : $\forall x \in I, \quad f(x) \succeq f(x_m)$.

Exemple

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x-2)^2 + 1$ La fonction f a pour tableau de variation :

x	$-\infty$	2	$-\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$ 1 $\nearrow$	$+\infty$

La fonction f est donc positive $f \geq 1$ et admet en 2 un minimum de 1 sur $\mathbb{R}$



3. Parité de fonction

Définition

Soit f une fonction définie sur un D.

- On dit que f est une fonction paire si, seulement si elle vérifie :

$$\begin{cases} x \in D \Rightarrow -x \in D \\ f(-x) = f(x) \end{cases}$$

- On dit que f est une fonction impaire si, seulement si elle vérifie :

$$\begin{cases} x \in D \Rightarrow -x \in D \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$$

Propriété

Soit f une fonction définie sur D, et (C_f) sa courbe dans un repère d'axes (Ox) et (Oy).

- f est paire alors (C_f) est symétrique par rapport à l'axe des coordonnées (Oy).
- f est impaire, alors (C_f) est symétrique par rapport à l'origine O.

4. Variation d'une fonction

4.1 Taux de variation

Définition

Soit f une fonctions définie sur I, et soient a et b deux éléments distincts de I.

On appel le taux de variation de la fonction f entre a et b le nombre : $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

4.2 Variation d'une fonctions

Propriété

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, et soit T le taux de variation de f sur I.

- f est croissante sur I si, seulement si $T \succeq 0$.
- f est décroissante sur I si, seulement si $T \preceq 0$.
- f est strictement croissante sur I si, seulement si $T \succ 0$.
- f et strictement décroissante sur I si, seulement si $T \prec 0$.

Exemple

$\star$ Déterminant la variation de la fonction $f(x) = x^2 - 1$ sur $I = \mathbb{R}^+$. Soit a et b dans I. On a :

$$\begin{aligned} T = \frac{f(a)-f(b)}{a-b} &= \frac{a^2-1-b^2+1}{a-b} \\ &= \frac{a^2-b^2}{a-b} \\ &= \frac{(a-b)(a+b)}{a-b} \qquad = a+b \succeq 0 \quad car(a \succeq 0) et (b \succeq 0) \end{aligned}$$

Donc T est croissante sur I.

$\star$ Déterminant la variation de $g(x) = \dfrac{x+1}{x}$ sur $I =]-\infty; 0[$. Soit a et b dans I. On a :

$$\begin{aligned} T = \frac{g(a)-g(b)}{a-b} &= \frac{\dfrac{a+1}{a} - \dfrac{b+1}{b}}{a-b} \\ &= \frac{\dfrac{b(a+1)-a(b+1)}{ab}}{a-b} \\ &= \frac{\dfrac{b-a}{ab}}{a-b} \\ &= \frac{-(a-b)}{(a-b)ab} \\ &= \frac{-1}{ab} \prec 0 \quad car(a \prec 0) et (b \prec 0) et (ab \succ 0) \end{aligned}$$

Donc g est strictement décroissante sur I.

Exercice d'application

Déterminer la variation de la fonction f sur l'intervalle I dans les cas suivants :

$$f(x) = 2 - \frac{1}{x^2+1} \quad :: \quad I = [0; +\infty[$$

$$f(x) = x^2 - 2x + 1 \quad :: \quad I = [1; +\infty[$$

$$f(x) = \sqrt{x+1} \quad :: \quad I = [-1; +\infty[$$

4.3 Parité et variation

Propriété

Soit une f une fonction définie sur D et soient I et I' deux intervalles symétriques de D.

- Si f est une fonction paire, alors elle a différents variations sur I et I'.
- Si f est une fonction impaire, alors elle a la même variation sur I et I'

Propriété

Soit f une fonction définie sur I et soit α un nombre réel.

- les fonctions f et $f + \alpha$ ont la même variation.
- les fonctions f et $\alpha \times f$ ont déférents variation si $\alpha \prec 0$ et ils ont la même variation si $\alpha \succ 0$.

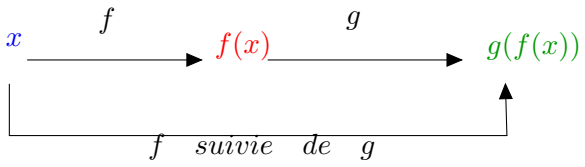
5. Composition de fonctions

5.1 Composition de deux fonctions

Définition

Soient f une fonction définie sur I à valeurs dans J, et g une fonction définie sur J à valeurs dans K.

L'expression de la fonction composée f suivie de g est donnée par le montage suivant :



On note gof la fonction composée f suivie de g.

La fonction gof définit sur I à valeurs dans K.

Exemple

Soit les deux fonctions $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = \sqrt{x+1}$.

Définissons la fonction gof :

$$\begin{aligned}(gof)(x) &= g(f(x)) \\ &= \sqrt{f(x)+1} \quad = \sqrt{x^2+1+1} = \sqrt{x^2+2}\end{aligned}$$

Définissons la fonction fog :

$$\begin{aligned}(fog)(x) &= f(g(x)) \\ &= (\sqrt{x+1})^2 + 1 \quad = x+1+1 = x+2\end{aligned}$$

Exercice d'application

Soit les fonctions f, g et h définissent par : $f(x) = 2x$ et $g(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$ et $h(x) = x^2 + 1$.

1. Définis les fonctions gof, goh et hof

5.2 Sens de variation de composition de deux fonctions

Théorème

Soient f et g deux fonctions.

- Si f et g ont le même sens de variation, alors fog et gof sont croissantes.
- Si f et g ont des sens de variation différents, alors fog et gof sont décroissantes.

Exemple

Soit les fonctions : $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = \dfrac{1}{x}$ et $h(x) = \sqrt{x+2}$. et soit $I =]0, +\infty[$.
On a la fonctions f est croissante sur I, la fonction g est décroissante sur I, la fonction h est croissante sur I.

- La fonction gof définit par $gof(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ est décroissante sur I
- La fonction hof définit par $hof(x) = \sqrt{x^2+3}$ est croissante sur I.

6. Fonctions de référence

6.1 La fonctions $\sqrt{x+a}$

Activité

Soit la fonction f définit par : $f(x) = \sqrt{x+1}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Monter que f est positive sur D_f.

3. Monter que $\forall a, b \in D_f^2, \quad T = \dfrac{a-b}{(a-b)\sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}}$. On désigne par T le taux de variation de f entre a et b.

4. En déduire la variation de f sur D_f.

5. Compléter le tableau suivant :

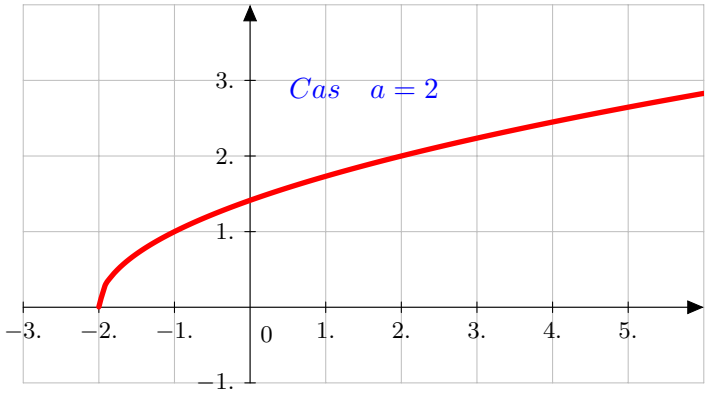
x	0	1	2	3
f(x)				

6. Tracer la courbe de la fonction f dans un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Définition

La fonction $f(x) = \sqrt{x+a}$ est :

- Définie sur $[-a; +\infty[$.
- Strictement croissante sur $[-a; +\infty[$.
- Sa courbe est de la forme :



6.2 La fonction αx^3

Activité

Partie A :

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \alpha x^3$.

1. Monter que $D_f = \mathbb{R}$.

2. Monter que f est impaire.

3. Monter que $\forall a, b \in [0, +\infty[^2, \quad T = \dfrac{\alpha(a-b)(a^2+ab+b^2)}{a-b}$. On désigne par T le taux de variation de f entre a et b.

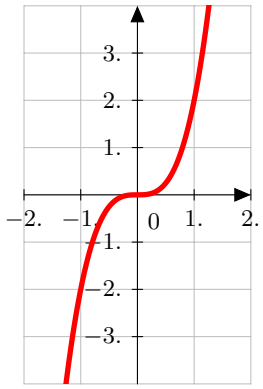
4. Monter que f est croissante sur $\mathbb{R}$ si $\alpha \succ 0$, et que f est décroissante sur $\mathbb{R}$ si $\alpha \prec 0$.

5. Tracer (C_f) dans le cas ou $\alpha = 2$, et $\alpha = -2$ dans un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$

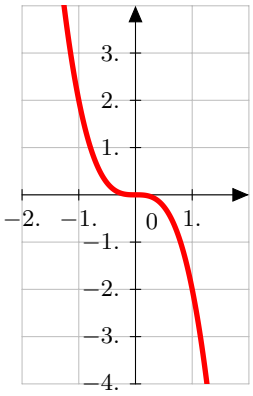
Définition

La fonction $f(x) = ax^2$ est :

- Définit sur $\mathbb{R}$.
- Impaire.
- Croissante sur $\mathbb{R}$ si $(a \succ 0)$, décroissante sur $\mathbb{R}$ si $(a \prec 0)$.
- Sa courbe est de la forme :



La courbe de la fonction $x \mapsto 2x^3$



La courbe de la fonction $x \mapsto -2x^3$