Prof : BOUYGUIR Taher

Classe : 1BACSHF

Généralité sur les fonctions numériques

Année scolaire : 2024/2025

Le contenu	*Remarques*

I. Fonction numérique :

Activité ① :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = 2x + 3$.

1) Calculer l'image des nombres suivants : 0 ،2 et -2.

2) Déterminer les antécédents de 5 ،9 et -3.

Définition :

Une fonction numérique f d'une variable réelle x est une relation qui à un nombre réel x associe un unique nombre réel y noté $f(x)$. On écrit alors : $f(x) = y$.

Et on dit que :

* $\boldsymbol{f(x)}$ est l'image de $\boldsymbol{x}$ par la fonction f.
* $\boldsymbol{x}$ est l'antécédent de $\boldsymbol{f(x)}$ par la fonction f.

Exemples :

* $f(x) = 5x^2 + 3x + 1$ est une fonctoin polynome.
* $f(x) = \frac{4x+3}{5x-2}$ est une fonction homographiques.
* $f(x) = \frac{x^2+3x+1}{2x^2+3x-1}$ est une fonction rationnelle.

Application ① :

Soit g la fonction définie par : $g(x) = x^2 + ax$ où $a \in \mathbb{R}$.

Déterminer a dans les deux cas suivants :

- L'image de 2 est -2.
- Le nombre 0 est un antécédent de 3.

Définition :

Domaine de définition ou l'ensemble de définition de est l'ensemble des valeurs de la variable pour lesquelles la fonction est définie.

Remarque :

* L'ensemble de définition d'une fonction polynôme est $\mathbb{R}$.
* L'ensemble de définition d'une fonction rationnelle est l'ensemble des nombres tel que le dénominateur est différent de zéro.

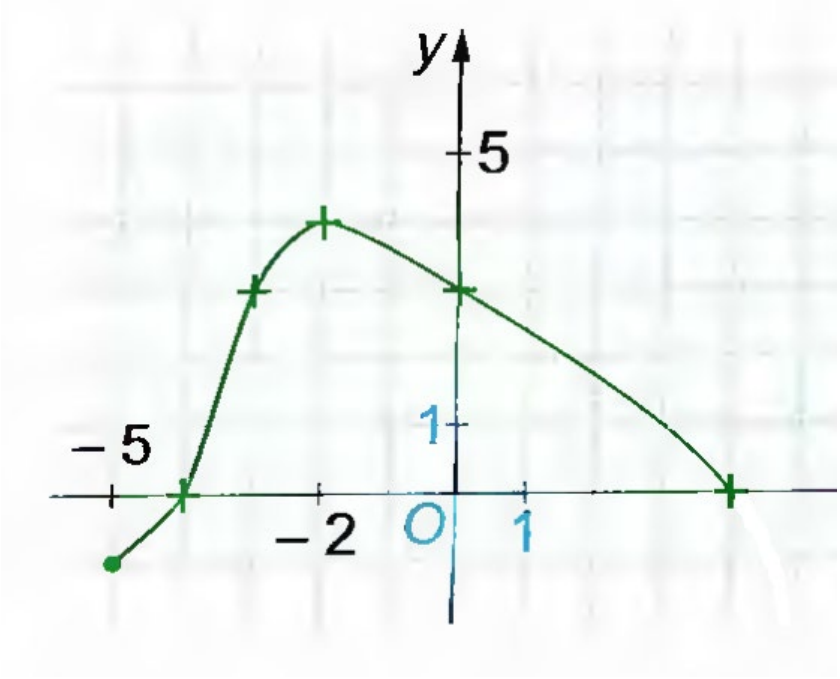
Application ② :

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

- $f(x) = 3x^3 - 5x^2 + x + 1$
- $f(x) = \frac{4x+3}{5x-2}$
- $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$
- $f(x) = \frac{2x}{x^2-7x+6}$

✍ ***Application ③ :***

La figure ci-dessous représente la courbe d'une fonction f.



1) Déterminer l'ensemble de définition de f.

2) Déterminer les images par *f* des nombres suivants : -5, - 4, - 3, - 4, 0 *et* 4.

3) Par *f,* quels sont les antécédents de 3, 0, −1 et de 5 ?

4) Déterminer les points d'intersection de(C_f) avec les axes du repère.

II. Parité d'une fonction numérique :

✍✍ *Définition :*

Soit *f* une fonction définie sur un D_f.

• f est une fonction paire si, et seulement si : $\forall x \in D_f: \begin{cases} -x \in D_f \\ f(-x) = f(x) \end{cases}$

• f est une fonction impaire si, et seulement si : $\forall x \in D_f: \begin{cases} -x \in D_f \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$

✍ ***Application ④ :***

Etudier la parité des fonctions suivantes :

- $f(x) = \frac{x^3}{x^2+4}$
- $f(x) = 2x^5 - 3x$
- $f(x) = 3x^2 + 5$

Définition :

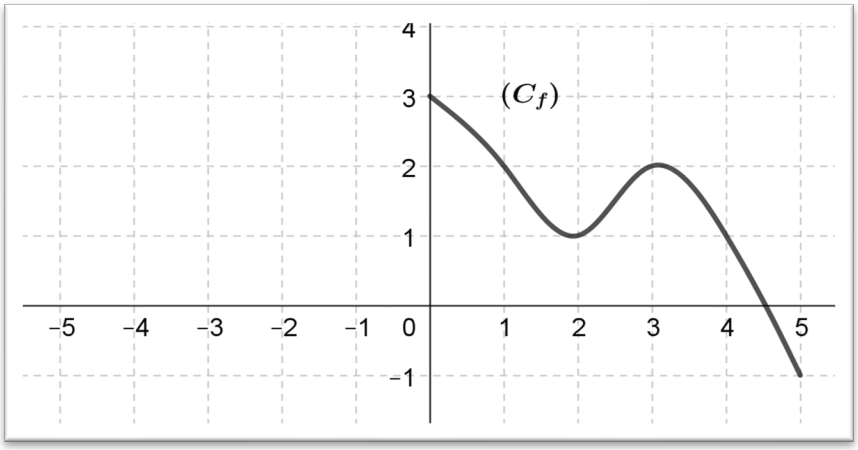
Soit *f* une fonction et (C_f) sa courbe.

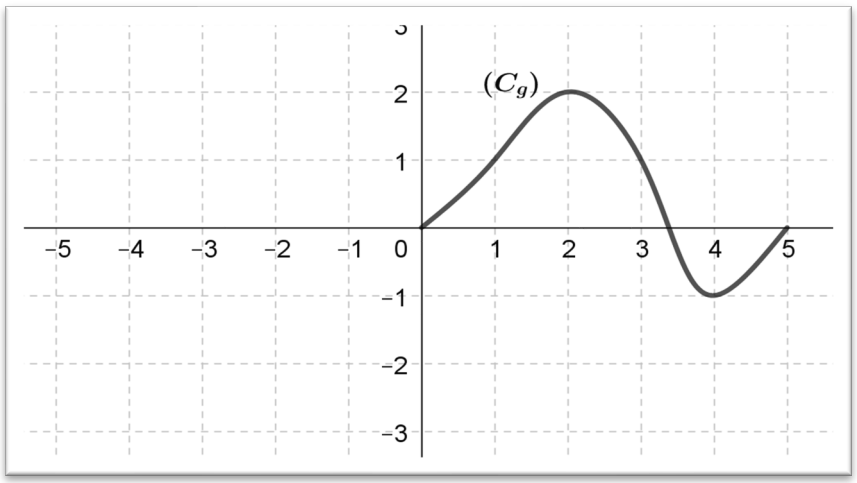
• f est paire si, et seulement si : (C_f) est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

• f est impaire si, et seulement si : (C_f) est symétrique par rapport à l'origine du repère.

✍ ***Application ⑤ :***

Considérons f et g les fonctions définies sur $[-5; 5]$ par ses courbes respectives (C_f) et (C_g) représentées ci-dessous :





1) Compléter(C_f) sachant que $f$est paire et (C_g) sachant que $g$est impaire.

III. Fonction majorée - Fonction minorée - Fonction bornée

Définition :

Soit f une fonction définie un intervalle I ($I \subset \mathbb{R}$).
On dit que :
*f est majorée sur I s'il existe un nombre réel M tel que $(\forall x \in I); f(x) \leq M$
*f est minorée sur I s'il existe un nombre réel m tel que $(\forall x \in I); f(x) \geq m$
*f est bornée sur I s'elle est majorée et minorée sur I $\big((\forall x \in I); m \leq f(x) \leq M\big)$.

Application ② :

Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = -2x^2 + 5$ et $g(x) = 2x^2 - 3$.

1) Montrer que f est majorée par 5.

2) Montrer que g est minorée par -3.

IV. Comparaison de fonctions

Définition :

Soient f et g deux fonctions numériques définies sur I .
On dit que f est inférieur ou égal à g si et seulement si $(\forall x \in I); f(x) \leq g(x)$ et on écrit $f \leq g$

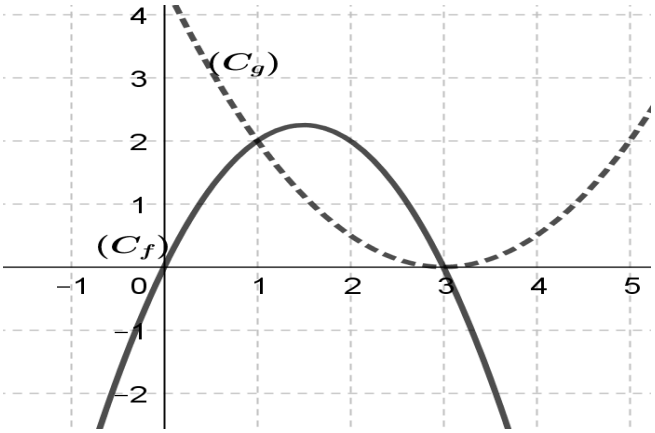
On dit que f est supérieur ou égal à g si et seulement si $(\forall x \in I); f(x) \geq g(x)$ et on écrit $f \geq g$

Interprétation graphique

Si $f \leq g$ alors $\big(C_f\big)$ est au-dessous de $\big(C_g\big)$ sur I.
Si $f \geq g$ alors $\big(C_f\big)$ est au-dessus de $\big(C_g\big)$ sur I .

✍ ***Application ⑧ :***

Les fonctions f et g sont définies sur IR ; leurs représentations graphiques sont données ci-dessous.



1) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$.

2) Résoudre graphiquement les inéquations suivantes :

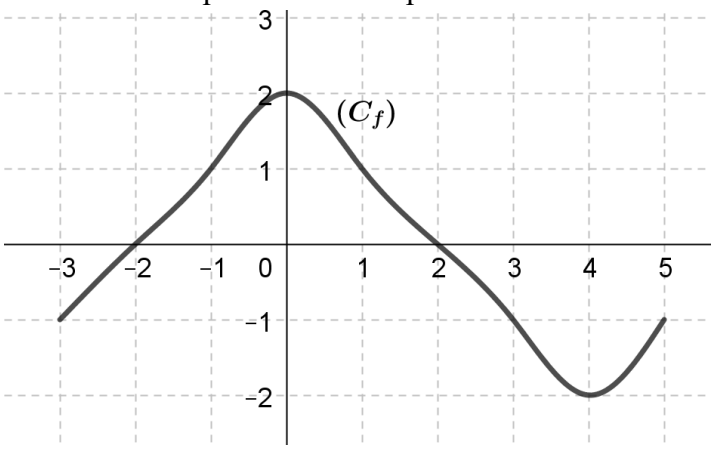
- $f(x) \leq g(x)$.
- $f(x) > g(x)$.

Remarque :

Soient f une fonction et $D \subset D_f$ et k un nombre réel.
Dire que pour tout $x \in D$: $f(x) > k$ revient à dire que (C_f) est strictement au-dessus de la droite d'équation : $y = k$ sur D.
Dire que pour tout $x \in D$: $f(x) \leq k$ revient à dire que (C_f) est au-dessous de de la droite d'équation : $y = k$ sur D.

✍ ***Application ⑨ :***

Considérons$f$ la fonction définie par sa courbe représentée ci-dessous :



1) Donner l'ensemble de définition de f.

2) Résoudre graphiquement les équations $f(x) = 0$ et $f(x) = -1$.

3) Résoudre graphiquement les inéquations suivantes :

- $f(x) < 0$.
- $f(x) \geq 0$.
- $f(x) > 1$.
- $f(x) \leq 1$

Remarque :

Pour comparer deux fonctions f et g définies par leurs expressions, on peut étudier le signe de $f(x) - g(x)$ pour $x \in D$.

✍ ***Application ⑨ :***

Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = x^2$ et $g(x) = 4x - 3$.

1) Donner D_f et D_g.

2) a) Vérifier pour tout $x \in \mathbb{R}$ que :

$f(x) - g(x) = (x-1)(x-3)$.

b) Etudier le signe de $f(x) - g(x)$ sur $\mathbb{R}$ puis interpreter graphiquement les résultats.

V. Variation d'une fonction

✍ ***Propriété ② :***

Soit f une fonction définie sur I et soient ***a*** et ***b*** deux nombres réels dans I

- Si $a < b$ et $f(a) < f(b)$ alors on dit que la fonction f est **strictement croissante** sur I
- Si $a < b$ et $f(a) > f(b)$ alors on dit que la fonction f est **strictement décroissante** sur I.
- Si $a < b$ et $f(a) = f(b)$ alors on dit que la fonction f est **constante** sur I.

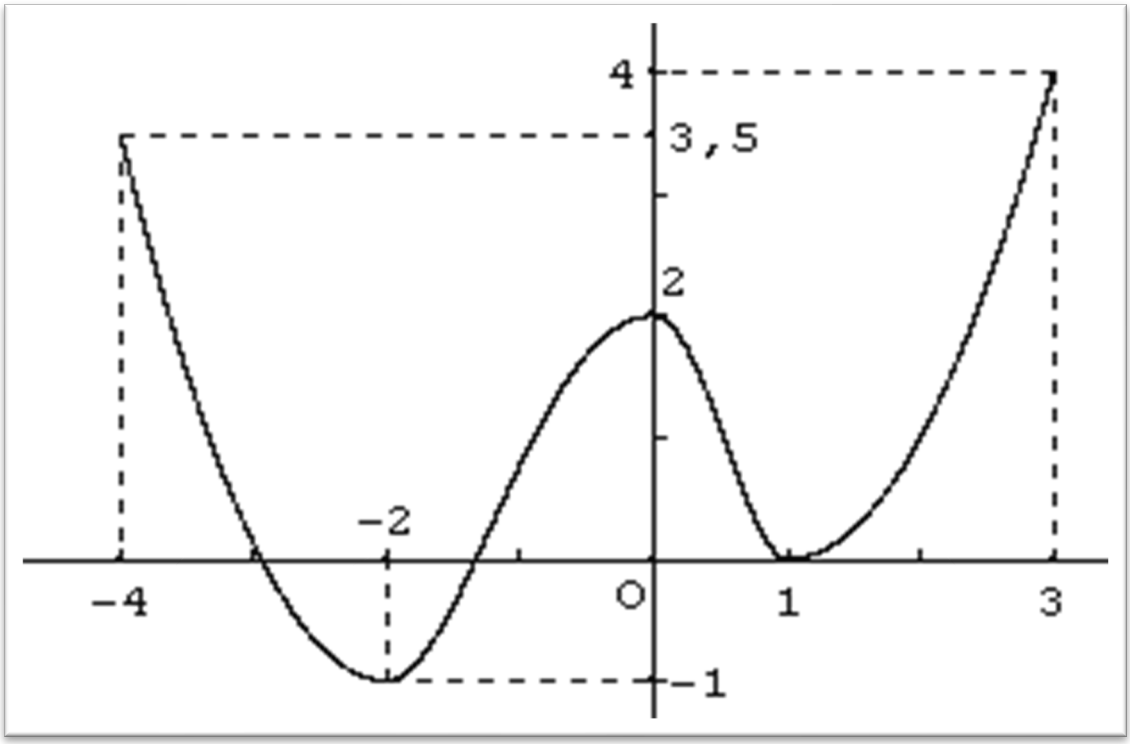
✍ ***Application ⑩ :***

Soit f une fonction définie par : $f(x) = x^2 + 2$ sur $\mathbb{R}$.

Montrer que f est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et décroissante sur $\mathbb{R}^-$.

✍ ***Application ⑪ :***

Dresser le tableau des variations de la fonction f représentée par sa courbe ci-dessous :



VI. Extremums d'une fonction numérique

✍ ***Définition :***

Soit f une fonction définie sur I et soit a un élément de I.

- On dit $f(a)$ est une **valeur minimale** de f sur I si pour tout x de I on a $f(x) \geq f(a)$.
- On dit $f(a)$ est une **valeur maximale** de f sur I si pour tout x de I on a $f(x) \leq f(a)$
- Si $f(a)$ est une valeur maximale ou une valeur minimale de f sur I alors le point $A(a; f(a))$ est un **extremum** de f sur I.

✍ *Application ①②:*

Soit f une fonction définie sur $[-2;6]$ par son tableau de variations suivant :

x	-2		-1	0		$\frac{4}{3}$		6
$f(x)$	3	↘	-2	↗	$\frac{1}{3}$	↘	-1	↗ $\frac{5}{6}$

1) Donner l'image -2 et 0 et 6.

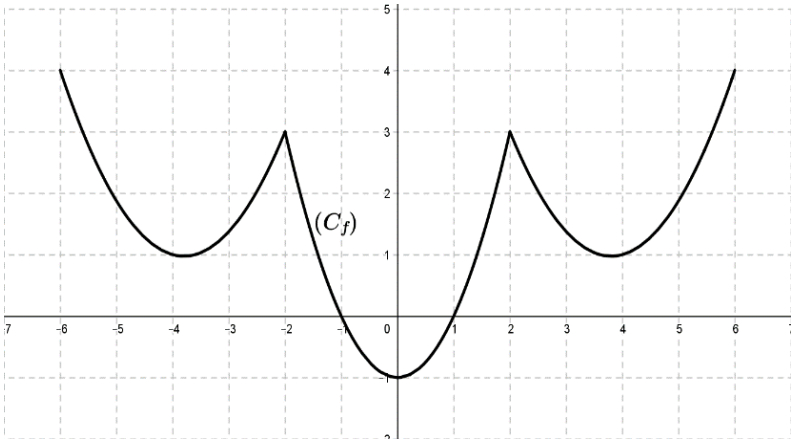
2) Déterminer la valeur maximale el la valeur minimale de f sur $[-2;6]$.

3) Spécifier le nombre de fois où la courbe de f coupe l'axe des abscisses.

4) Déterminer le nombre d'antécédents des nombres :-2 et -1 et 1.

✍✍ *Exercice :*

Considérons$f$ la fonction définie par sa courbe représentée ci-dessous :



1) Donner D_f.

2) Déterminer la parité de la fonction f.

3) Donner le tableau de variations de f.

4) Déterminer la valeur maximale el la valeur minimale de f sur D_f puis sur $[1;5]$.

5) Résoudre graphiquement les inéquations suivantes :

- $f(x) < 0$.
- $f(x) \geq 0$.