Généralités sur les fonctions numériques

Remarques

I. Fonction majorée - Fonction minorée - Fonction bornée :

Activité ①:

On considère f la fonction définie par $f(x)=\frac{2x^2+3}{x^2+1}$.

1. Déterminer D_f, l'ensemble de définition de f.
2. Montrer que $(\forall x\in D_f): f(x)\leq 3$.

On dit que f est majorée par 3 sur D_f.

3. Montrer que $(\forall x\in D_f): f(x)\geq 2$.

On dit que f est minorée par 2 sur D_f.

4. En déduire que $(\forall x\in D_f): 2\leq f(x)\leq 3$.

On dit que f est bornée par 2 sur D_f.

Définitions :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que :

- f est **majorée** sur I s'il existe un réel M tel que $(\forall x\in I): f(x)\leq M$.
- f est **minorée** sur I s'il existe un réel m tel que $(\forall x\in I): m\leq f(x)$.
- f est **bornée** sur I s'il existe des réels M et m tels que $(\forall x\in I): m\leq f(x)\leq M$.

Exemple :

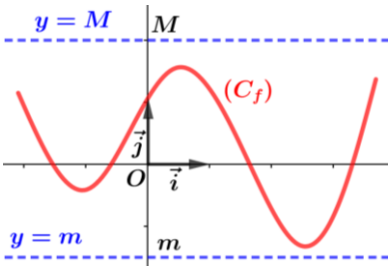
On considère La fonction $f: x\mapsto 1-\frac{1}{x}$.

- f est majorée sur $]0;+\infty[$ par 1. En effet $(\forall x\in]0;+\infty[): f(x)-1=-\frac{1}{x}$ et $-\frac{1}{x}<0$ pour tout $\in]0;+\infty[$.
- f est minorée sur $]-\infty;0[$ par 1 . En effet $(\forall x\in]-\infty;0[): f(x)-1=-\frac{1}{x}$ et $-\frac{1}{x}>0$ pour tout $\in]-\infty;0[$.

Remarques :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de IR et (C_f) sa courbe.

- ✓ Si f est majorée par un réel M sur I, alors (C_f) est au-dessous la droite d'équation $y=M$ sur I.
- ✓ Si f est minorée par un réel m sur I, alors (C_f) est au-dessus la droite d'équation $y=m$ sur I.



Application ① :

On considère f et g les fonctions définies respectivement par $f(x)=3-\sqrt{1-2x}$ et $g(x)=\sqrt{x^2+4}$.

1. Déterminer D_f et D_g.
2. Montrer que f est majorée par 3 sur D_f.
3. Montrer que g est minorée par 2 sur D_g.

Définitions :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un élément de I. On dit que :

- $f(a)$ est **la valeur minimale** (ou **le minimum**) de f sur I si $(\forall x\in I): f(x)\geq f(a)$.
- $f(a)$ est **la valeur maximale** (ou **le maximum**) de f sur I si $(\forall x\in I): f(x)\leq f(a)$.
- $f(a)$ est un **extremum** de f sur I s'il est le maximum ou le minimum de f sur I.

Exemple :

-3 est La valeur minimale de la fonction $f: x \longmapsto x^2 - 4x + 1$ sur $\mathbb{R}$. En effet :
$(\forall x \in \mathbb{R})$: $f(x) - (-3) = (x-2)^2 \geq 0$ et $f(2) = -3$.

Exercice ② de la a série:

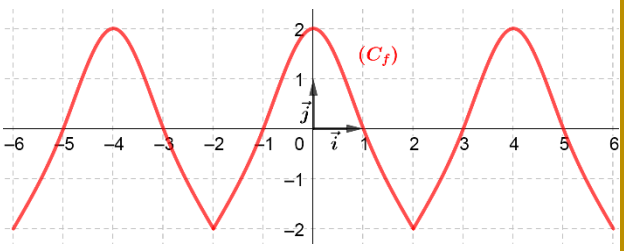
Soit f une fonction numérique définie par $f(x) = x + \frac{4}{x}$.

1. Déterminer D_f l'ensemble de définition de f.
2. a. Calculer $f(2)$.
   b. Montrer que f est minorée par 4 sur $]0; +\infty[$. Conclure.
3. Montrer que -4 est la valeur maximale de f sur $]-\infty; 0[$.

II. Fonctions périodiques :

Activité ②:

La figure ci-contre représente la courbe représentative d'une fonction définie sur IR.



1. Vérifier que $f(-2) = f(2)$, $f(0) = f(4)$ et $f(1) = f(5)$.
2. Soit $x \in IR$, déterminer la relation entre $f(x+4)$ et $f(x)$.

Définition :

Soit f une fonction définie sur D et T un nombre réel strictement positif.
On dit que f est périodique (ou T-périodique) sur D si :

- $x + T \in D$ pour tout x de D .
- $f(x+T) = f(x)$ pour tout x de D.

Exemples :

- Les fonctions $x \longmapsto \sin(x)$ et $x \longmapsto \cos(x)$ sont périodiques de période 2π.
- La fonction $x \longmapsto \tan(x)$ est périodique de période π.

Application ② :

On considère les fonctions f et g définies respectivement sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos^2(x)$ et $g(x) = sin(2\pi x)$.
Montrer que les fonctions f et g sont périodiques de périodes respectives π et 1.

III. Comparaison de deux fonctions :

Définition :

Soient f et g deux fonctions définies sur le même ensemble D. On dit que :

- f et g sont **égales** sur D si et seulement si, $(\forall x \in D) : f(x) = g(x)$.
- f est **supérieure ou égale** à g sur D si et seulement si, $(\forall x \in D): f(x) \geq g(x)$ et on écrit $f \geq g$.

Exemple :

Soient f et g deux fonctions définies sur IR^* par $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x^2+2}$ et $g(x) = x + 1$.
On a $(\forall x \in IR^*)$: $f(x) - g(x) = \frac{1}{x^2+2} > 0$.
Donc $f > g$ sur IR^*.

Interprétation graphique :

Soient f et g deux fonctions et D un ensemble inclus dans $D_f \cap D_g$.

- ✓ Si $f > g$ sur D, alors (C_f) est strictement au-dessus de (C_g) sur D.
- ✓ Si $f \leq g$ sur D, alors (C_f) est au-dessous de (C_g) sur D.

Application ③ :

On considère f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x + 1$ et $g(x) = -2x^2 + 4x + 1$.

1. Etudier le signe de $f(x) - g(x)$ sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire une comparaison entre f et g sur $\mathbb{R}$.

Exercice ③ de la série:

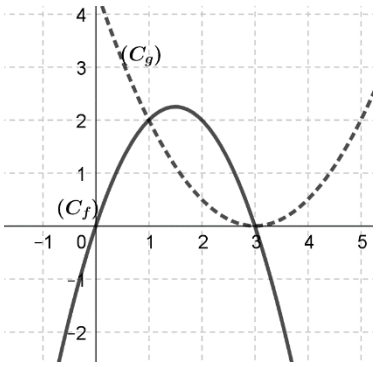
Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par ses courbes ci-contre.

1) Résoudre graphiquement les équations suivantes:

- $f(x) = 2$.
- $f(x) = 0$.
- $f(x) = g(x)$.

2) Résoudre graphiquement les inéquations suivantes :

- $f(x) < 2$
- $g(x) \geq 0$.
- $f(x) > g(x)$.



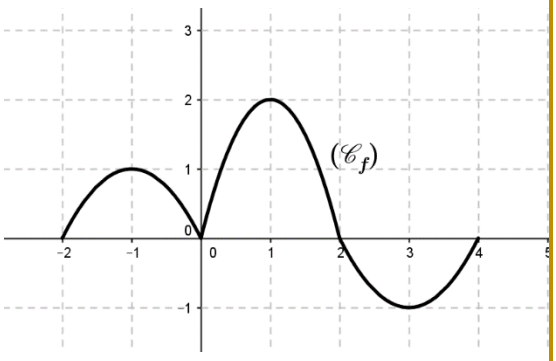
IV. Image d'un intervalle par une fonction numérique :

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
L'ensemble des valeurs de $f(x)$ tels que $x \in I$ est appelé **image de l'intervalle *I*** par la fonction f et on le note par $f(I)$.
Autrement dit : $f(I) = \{f(x) / x \in I\}$.

Exemple :

La figure ci-contre représente la courbe représentative d'une fonction f définie sur $[-2; 4]$.
Lorsque x varie sur l'intervalle $[-2; -1]$, $f(x)$ varie sur l'intervalle $[0; 1]$. Donc :
$f([-1; 1]) = [1; 3]$.
De même, on a :



- $f([0; 1]) = [0; 2]$ $\quad$ $f([1; 3]) = [-1; 2]$
- $f([1; 4]) = [-1; 2]$ $\quad$ $f([0; 3[) =]-1; 2]$
- $f(]-1; 1[) = [0; 2[$ $\quad$ $f(]-2; 4[) = [-1; 2]$

Technique :

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a ; b]$.

- ✓ Si f est croissante sur $[a ; b]$, alors : $f([a ; b]) = [f(a) ; f(b)]$.
- ✓ Si f est décroissante sur $[a ; b]$, alors : $f([a ; b]) = [f(b) ; f(a)]$.
- ✓ Si f change de monotonie sur $[a ; b]$, alors : $f([a ; b]) = [m ; M]$ avec m la valeur minimale et M la valeur maximale de f sur $[a ; b]$.

Exercice ④ de la série :

Soit f une fonction dont le tableau de variations est le suivant :
Déterminer ce qui suit :

- $f([-4; 0])$ $\quad$ $f([0; 1])$ $\quad$ $f([0; 2])$
- $f([-4; 1])$ $\quad$ $f(1; +\infty[)$

x	-4		0		1		2		$+\infty$
$f(x)$	-3	↗	2	↘	0	↗	$\frac{5}{2}$	↘	

V. Monotonie une fonction numérique :

Activité ③:

On considère f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$.

1. Déterminer D_f, l'ensemble de définition de f.
2. Etudier la parité de f puis interpréter graphiquement le résultat.
3. Etudier la monotonie de f sur $[0; +\infty[$ puis sa monotonie sur $]-\infty; 0]$.
4. Etudier la monotonie des fonctions $3f$, $-2f$ et $f + 3$ sur $[0; +\infty[$.

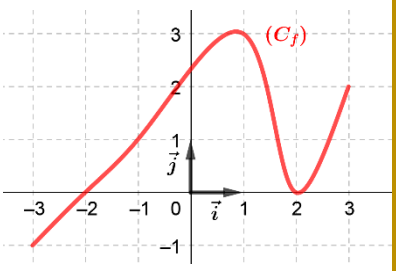
Propriété :

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I et λ un nombre réel.

- Les deux fonctions f et $f+k$ ont le même sens de variations sur I.
- Si $\lambda > 0$, alors f et λf ont le même sens de variations sur I.
- Si $\lambda < 0$, alors f et λf ont des sens de variations contraires sur I.

Application ④ :

Soit f une fonction définie sur $[-3;3]$ par sa courbe ci-contre.
Donner le tableau de variations des fonctions f, $f+2$ et $-3f$.



VI. Composée de deux fonctions numériques :

Activité ④:

On considère f et g deux fonctions définies par $f(x) = -x+5$ et $g(x) = \sqrt{x}$.

1. a.Calculer $f(1)$ puis $g(f(1))$.
b.Calculer $f(-4)$ puis $g(f(-4))$.
c.Calculer $f(8)$. Peut-on calculer puis $g(f(8))$.

2. a.Déterminer l'intervalle I tel que $g(f(x))$ est calculable pour tout x de I.
b.Déterminer l'expression de $g(f(x))$ pour tout x de I.

Définition :

g est une fonction définie sur un intervalle J et f est une fonction définie sur un intervalle I telle que, pour tout $x \in I$, on a $f(x) \in J$.
La fonction **composée** de f et g dans cet ordre, noté gof, est la fonction définie pour tout $x \in I$ par : $(gof)(x) = g\,(\,f(x)\,)$.

Remarques :

- $x \in D_{gof} \Leftrightarrow x \in D_f$ et $f(x) \in D_g$.
- En général, $gof \neq fog$.

Exemple :

Soient $f: x \mapsto x^2$, définie sur $D_f = \mathbb{R}$, et $g: x \mapsto \frac{2x}{x-4}$, définie sur $D_g = \mathbb{R}\backslash\{4\}$.

- Domaine de définition de la fonction composée gof :

On a $x \in D_{gof} \Leftrightarrow x \in D_f$ et $f(x) \in D_g$
$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ et $x^2 \neq 4$
$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ et $x \neq -2$ et $x \neq 2$.
Donc $D_{gof} =]-\infty;-2[\cup]2;+\infty[$.

- Expression de la fonction composée gof :

On a : $\forall x \in]-\infty;-2[\cup]2;+\infty[: (gof)(x) = g(\,f(x)) = g(x^2) = \frac{2x^2}{x^2-4}$.

Application ⑤ :

1. Soient f et g deux fonctions numériques définies par $f(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = \frac{2x+3}{3x-6}$.
   a. Déterminer D_f, D_g et D_{gof}.
   b. Donner l'expression de la fonction gof.

2. Ecrire la fonction h définie sur $\mathbb{R}^+$ par $h(x) = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+5}$.

Propriété :

Soient f et g deux fonctions numériques définies respectivement sur les intervalles I et J tels que $f(I) \subset J$.

- Si f et g ont même sens de variations, respectivement sur I et J, alors la fonction composée gof est croissante sur I.
- Si f et g ont des sens de variations contraires, respectivement sur I et J, alors la fonction composée gof est décroissante sur I.

Exemple :

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$.

h est la fonction de composée de $f: x \mapsto x^2$ et $g: x \mapsto \frac{1-x}{1+x}$ $(h = gof)$.

- On a f est décroissante sur $]-\infty; 0]$ et $f(]-\infty; 0]) = [0; +\infty[$.

Et puisque g est décroissante sur $[0; +\infty[$, alors h est croissante sur $]-\infty; 0]$.

- On a f est croissante sur $[0; +\infty[$ et $f([0; +\infty[) = [0; +\infty[$.

Et puisque g est décroissante sur $[0; +\infty[$, alors h est décroissante sur $[0; +\infty[$.

✍ Application ⑥ :

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x + 1$ et $g(x) = -2x + 1$.

1. Dresser les tableaux de variations de f et g.
2. Déterminer $f(]-\infty; 1])$ et $f([1; +\infty[)$.
3. Etudier les variations de la fonction gof sur $]-\infty; 1]$ et $[1; +\infty[$.

✍ Exercice ⑤ de la série :

On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = x^2 - 2x - 1$ et $g(x) = \frac{x-2}{x+2}$.

1. Donner D_f, D_g et D_{gof}.
2. Déterminer $gof(x)$ pour tout $x \in D_{gof}$.
3. Dresser les tableaux de variations de f et g.
4. Déterminer $f(]-\infty; 1])$ et $f([1; +\infty[)$.
5. Etudier les variations de la fonction gof sur $]-\infty; 1]$ et $[1; +\infty[$.

VII. Représentation graphique des fonctions $x \mapsto \sqrt{x+a}$ et $x \mapsto ax^3$:

1. Représentation graphique de la fonction $x \mapsto ax^3$:

Soient a un nombre réel non nul et $f: x \mapsto ax^3$.

On a $(\forall x \in \mathbb{R})$: $-x \in \mathbb{R}$ et $f(-x) = a(-x)^3 = -ax^3 = -f(x)$.

Ce qui entraine que f est impaire, donc qu'il suffit de l'étudier sur $\mathbb{R}^+$.

Soient x et y deux éléments de $[0; +\infty[$ tels que $x < y$

➢ Si $a > 0$:.

On a : $x < y \Rightarrow x^3 < y^3$ (car x et y sont positifs)

$\Rightarrow ax^3 < ay^3$ (car $a > 0$)

$\Rightarrow f(x) < f(y)$.

Donc f est croissante sur $[0; +\infty[$, et puisqu' elle est impaire, alors elle croissante sur $]-\infty; 0]$.

D'où f est croissante sur $\mathbb{R}$.

➢ Si $a < 0$:

On a : $x < y \Rightarrow x^3 < y^3$

$\Rightarrow ax^3 > ay^3$ (car $a < 0$)

$\Rightarrow f(x) > f(y)$.

Donc f est décroissante sur $[0; +\infty[$, et puisqu' elle est impaire, alors elle décroissante sur $]-\infty; 0]$.

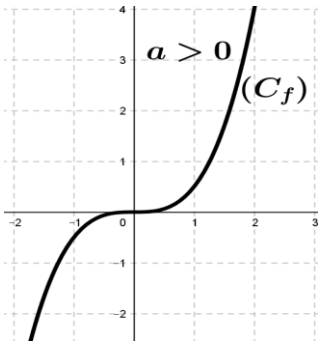
D'où f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

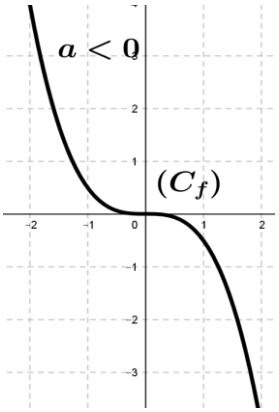
❖ $a > 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$		0 ↗	

❖ $a < 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$		0 ↘	





2. Représentation graphique de la fonction $x \mapsto \sqrt{x+a}$:

Soient a un nombre réel non nul et $f: x \mapsto \sqrt{x+a}$.

On a $D_f = [-a; +\infty[$.

Soient x et y deux éléments de $D_f = [-a; +\infty[$ tels que $x < y$.

On a : $x < y \Rightarrow x + a < y + a$

$\Rightarrow \sqrt{x+a} < \sqrt{y+a}$

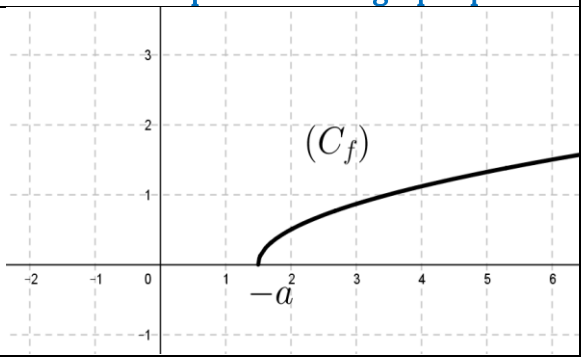
$\Rightarrow f(x) < f(y)$.

Donc f est strictement croissante sur $[-a; +\infty[$.

❖ Tableau de variations

x	$-a$		0		$+\infty$
$f(x)$		↗			

❖ Représentation graphique



Application ⑦ :

On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = \sqrt{x+2}$ et $g(x) = -x^3$ et soient (C_f) et (C_g) les courbes représentatives respectives des fonctions f et g dans un repère $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

1. Etudier les variations de f et g.
2. Construire (C_f) et (C_g).
3. Résoudre graphiquement l'inéquation $\sqrt{x+3} + x^3 < 0$ sur $[-2; +\infty[$.

Exercice ⑥ de la série .

Soient f et g deux fonctions définies par $f(x) = x^2 - x$ et $g(x) = \sqrt{x+2}$ et soient (C_f) et (C_g) leurs courbes respectives dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

1. a. Déterminer D_g , puis vérifier que $f(2) = g(2)$.

b. Représenter les courbes (C_f)et (C_g).

c. Déterminer graphiquement $f\left(\left]-\infty; \frac{1}{2}\right]\right)$.

d. Résoudre graphiquement sur $[-2; +\infty[$ l'inéquation $x^2 - x - \sqrt{x+2} \leq 0$.

2. on considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \sqrt{x^2 - x + 2}$.

a. Vérifier que $(\forall x \in \mathbb{R}): h(x) = (g \circ f)(x)$.

b. Déterminer les variations de la fonction h sur les intervalles $\left]-\infty; \frac{1}{2}\right]$ et $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$ en utilisant les variations de $f$et g.