Cours 2 : Généralités sur les fonctions numériques

I- Rappels 1

1) Fonction numérique et son domaine de définition 1

2) Parité d'une fonction 1

II- Comparaison de deux fonctions 2

1) Egalité de deux fonctions 2

2) Comparaison de deux fonctions 3

3) Signe d'une fonction 3

III- Fonction majorée - minorée - bornée 4

1) Définitions 4

2) Extremums d'une fonction sur un intervalle 5

IV- Fonction périodique 5

V- Monotonie d'une fonction 6

1) Sens de variations d'une fonction (rappels) 6

2) L'image d'un intervalle par une fonction 6

VI- La composée de deux fonctions 7

1) La composée de deux fonctions 7

2) Monotonie de la composée de deux fonctions monotones 7

VII- Représentation graphique de fonctions de référence 8

1) Représentation graphique de la fonction : $x \mapsto \sqrt{x+a}$ où $a \in \mathbb{R}$ 8

2) Représentation graphique de la fonction : $x \mapsto ax^3$ où $a \in \mathbb{R}^*$ 9

Généralités sur les fonctions numériques

I- Rappels

1) Fonction numérique et son domaine de définition

Définition 1

Une fonction numérique f d'une variable réelle x est une relation qui à un nombre réel x associe un unique réel y noté $f(x)$. On écrit alors :

$$f : I \longrightarrow J$$
$$x \longmapsto f(x)$$

et on dit que :

- $f(x)$ est ***l'image*** de x par la fonction f.
- x est ***l'antécédent*** de $f(x)$ par la fonction f.
- I est l'ensemble de départ de la fonction f.
- J est l'ensemble d'arrivé de la fonction f.

Remarque :

Il faut faire la différence entre la fonction f qui représente une relation et $f(x)$ qui représente l'image de x par f qui est un nombre réel.

Définition 2

Domaine de définition ou l'ensemble de définition de f est l'ensemble des valeurs de la variable x pour lesquelles la fonction f est définie.

Application :

Définir le domaine de définition des fonctions suivantes :

$$f(x) = 3x^2 - 5x + 8 \ ; \quad g(x) = \frac{x+3}{x^2-x} \ ; \quad h(x) = \sqrt{x+8} \ ; \quad k(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x+8}}$$

2) Parité d'une fonction

Définition 3

Soit $\mathcal{D}$ un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$.

On dit que $\mathcal{D}$ est ***symétrique*** par rapport à zéro ou que $\mathcal{D}$ est centré en zéro, si et seulement si :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R} : \ x \in \mathcal{D} \iff (-x) \in \mathcal{D}$$

Exemples :

- $\mathbb{R}$; $\mathbb{R}^*$; $[-5;5]$ et $\mathbb{R} - \{-3;3\}$ sont symétriques par rapport à zéro.
- $\mathbb{R} - \{3\}$; $]-\infty;1]$; $[-2;5]$ et $[-1;1[$ ne sont pas symétriques par rapport à zéro.

Définition 4

Soit $\mathcal{D}$ un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $\mathcal{D}$.

On dit que f est ***paire*** lorsque les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1°) le domaine de définition $\mathcal{D}$ est symétrique par rapport à zéro;

2°) et pour tout $x \in \mathcal{D}$: $f(-x) = f(x)$.

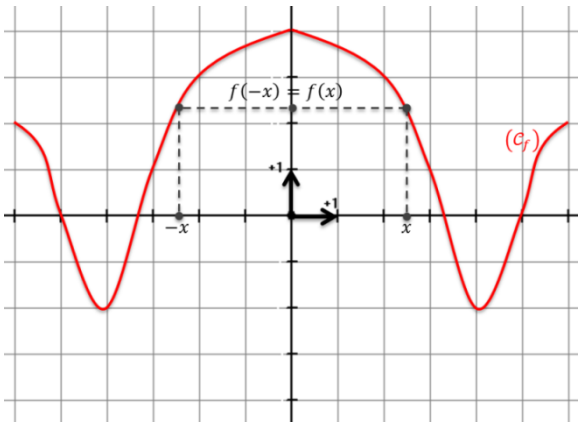
On dit que f est ***impaire*** lorsque les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1°) le domaine de définition $\mathcal{D}$ est symétrique par rapport à zéro;

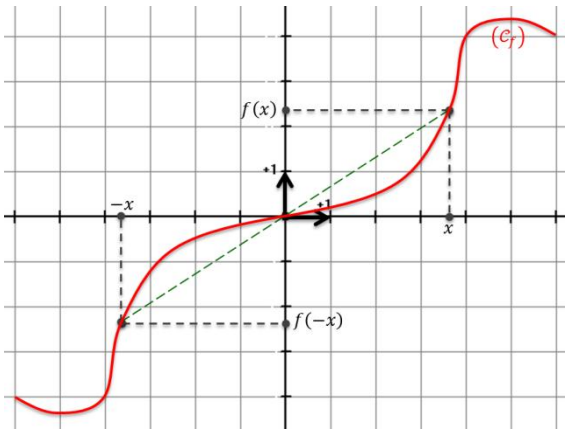
2°) et pour tout $x \in \mathcal{D}$: $f(-x) = -f(x)$.

Propriété :

- Dans un repère orthogonal (ou orthonormé), la courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- Dans un repère orthogonal (ou orthonormé), la courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère.



f est paire



f est impaire

Remarque :

- Si une fonction f est paire ou impaire, on réduit le domaine d'étude à la partie positive de $\mathcal{D}_f$.
- La courbe de f peut se construire par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées ou par rapport à l'origine du repère.

II- Comparaison de deux fonctions

1) Egalité de deux fonctions

Définition 1

Soit f et g deux fonctions numériques dont les ensembles de définition sont respectivement $\mathcal{D}_f$ et $\mathcal{D}_g$.

On dit que f et g sont ***égales***, et on note $f = g$, si les deux conditions suivantes sont vérifiées : $\begin{cases} \bullet \text{ Elles ont le même ensemble de définition : } \mathcal{D}_f = \mathcal{D}_g \\ \bullet \text{ Pour tout } x \in \mathcal{D}_f : f(x) = g(x) \end{cases}$

Application :

Les fonction f et g définies respectivement par :

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x} \quad \text{et} \quad g(x) = \sqrt{x}.\sqrt{x-1}$$

sont-elles égales ?

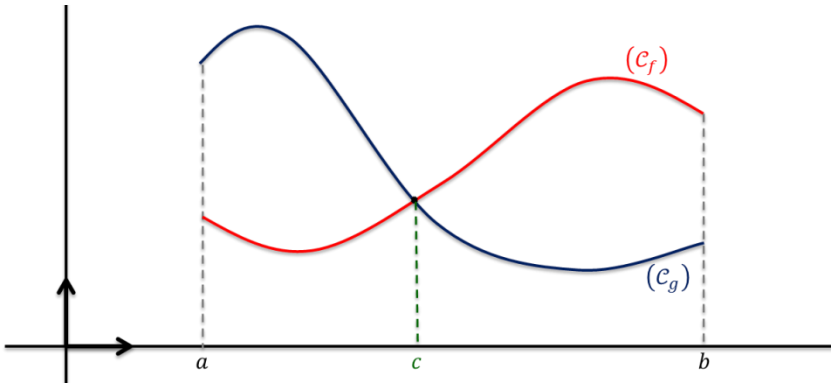
2) Comparaison de deux fonctions

Définition 2

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I.

On dit que f est ***inférieure ou égale*** à g sur I, et on note $f \leq g$, si $\forall x \in I: f(x) \leq g(x)$

Graphiquement, cela veut dire que la courbe de f se trouve au-dessous de la courbe de g sur l'intervalle I.



$(\mathcal{C}_f)$ est au-dessous de $(\mathcal{C}_g)$ sur $[a; c]$

Donc $f \leq g$ sur $[a; c]$

$(\mathcal{C}_f)$ est au-dessus de $(\mathcal{C}_g)$ sur $[c; b]$

Donc $f \geq g$ sur $[c; b]$

Application :

Comparer les fonctions f et g dans chacun des cas suivants :

- $f(x) = x^2 - 2x - 1$ et $g(x) = x - 1$
- $f(x) = x$ et $g(x) = \frac{x}{x+1}$

3) Signe d'une fonction

Définition 3

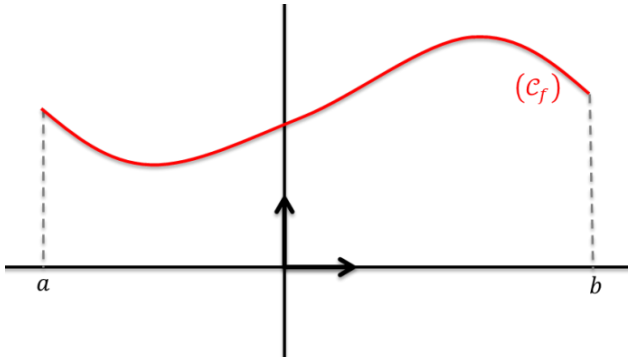
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative.

On dit que la fonction f est ***positive*** sur I, et on note $f \geq 0$, si $\forall x \in I: f(x) \geq 0$.

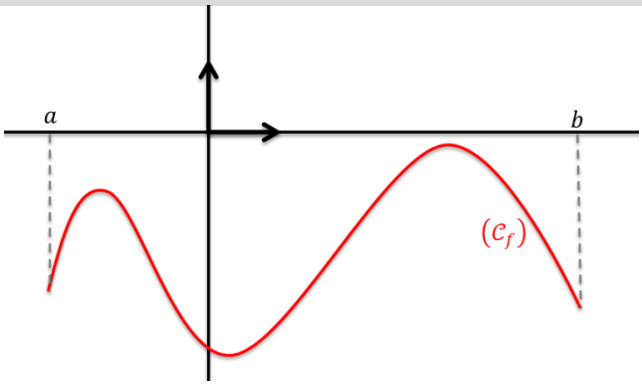
Graphiquement, cela veut dire que $(\mathcal{C}_f)$ se trouve au-dessus de l'axes des abscisses sur I.

On dit que la fonction f est ***négative*** sur I, et on note $f \leq 0$, si $\forall x \in I: f(x) \leq 0$.

Graphiquement, cela veut dire que $(\mathcal{C}_f)$ se trouve au-dessous de l'axes des abscisses sur I.



f est strictement positive sur $[a;b]$



f est strictement négative sur $[a;b]$

III- Fonction majorée - minorée - bornée

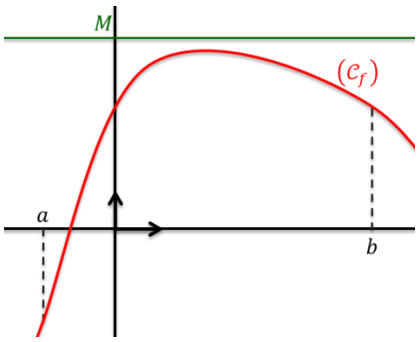
1) Définitions

Définition 1

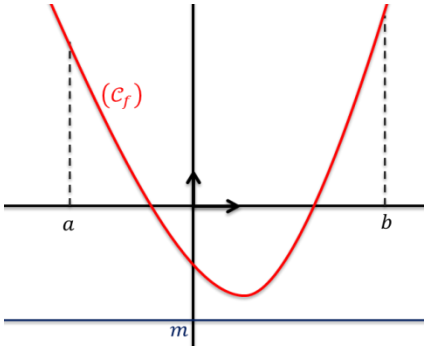
Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que :

- f est ***majorée*** sur I s'il existe un réel M tel que : $f(x) \leq M$ pour tout $x \in I$.
- f est ***minorée*** sur I s'il existe un réel m tel que : $f(x) \geq m$ pour tout $x \in I$.
- f est ***bornée*** sur I si elle est à la fois majorée et minorée.

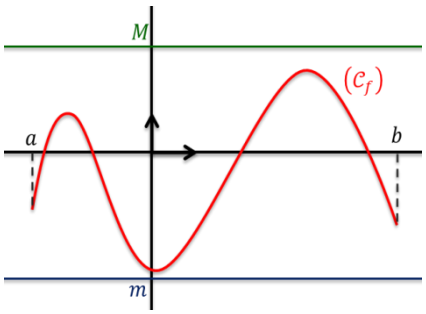
Interprétation graphique :



f est majorée sur $[a;b]$



f est minorée sur $[a;b]$



f est bornée sur $[a;b]$

Application :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$.

① Montrer que f est minorée sur $\mathbb{R}$ par 0.

② Montrer que f est majorée sur $\mathbb{R}$ par 1.

③ En déduire que f est bornée sur $\mathbb{R}$.

Propriété :

Une fonction f est bornée sur un intervalle I s'il existe un réel k tel que :

$$\forall x \in I : |f(x)| \leq k$$

2) Extremums d'une fonction sur un intervalle

Définition 2

Soit f une fonction définie sur un intervalle , et a un élément de l'intervalle I.

- On dit que $f(a)$ est le ***maximum*** de f sur I si : $\forall x \in I : f(x) \leq f(a)$.
- On dit que $f(a)$ est le ***minimum*** de f sur I si : $\forall x \in I : f(x) \geq f(a)$.
- On dit que $f(a)$ est un ***extremum*** de f si $f(a)$ est un maximum ou un minimum.

Application :

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-7; 9]$ dont le tableau de variations est le suivant:

x	-7		0		2		5		9
f	4	↘	-2	↗	6	↘	-3	↗	1

Déterminer les extremums de f sur chacun des intervalles suivants :

$[-7; 0]$; $[-7; 2]$ et $[-7; 9]$.

IV- Fonction périodique

Définition

Soit f une fonction et $\mathcal{D}_f$ son ensemble de définition.

On dit que f est ***périodique*** s'il existe un réel strictement positif T tel que :

$$\begin{cases} \bullet\ \forall x \in \mathcal{D}_f : (x+T) \in \mathcal{D}_f \\ \bullet\ \forall x \in \mathcal{D}_f : f(x+T) = f(x) \end{cases}$$

Le nombre réel T est appelé une ***période*** de la fonction f.

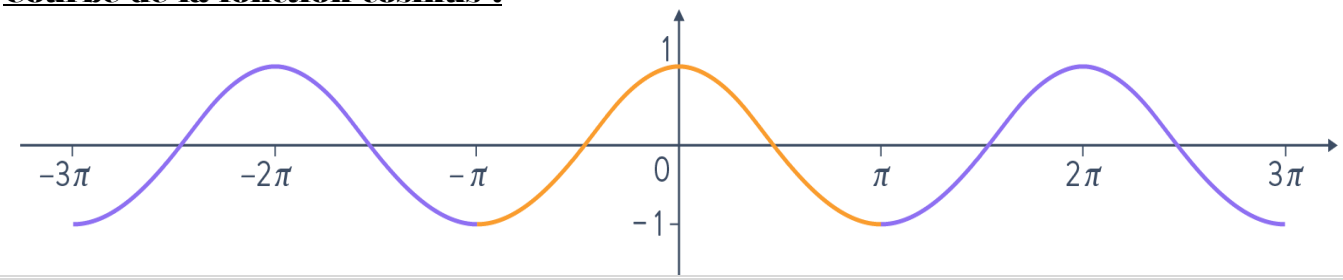
Exemples :

- Les fonctions cosinus et sinus sont périodiques de période $T = 2\pi$.
- La fonction tangente est périodique de période $T = \pi$.

Remarque :

Pour construire la courbe d'une fonction périodique de période T, on construit une portion de la courbe sur un intervalle de longueur T, puis on duplique indéfiniment cette portion à droite et à gauche.

Courbe de la fonction cosinus :



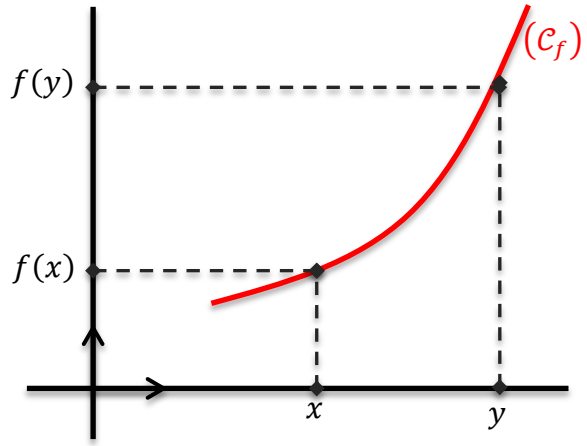
V- Monotonie d'une fonction

1) Sens de variations d'une fonction (rappels)

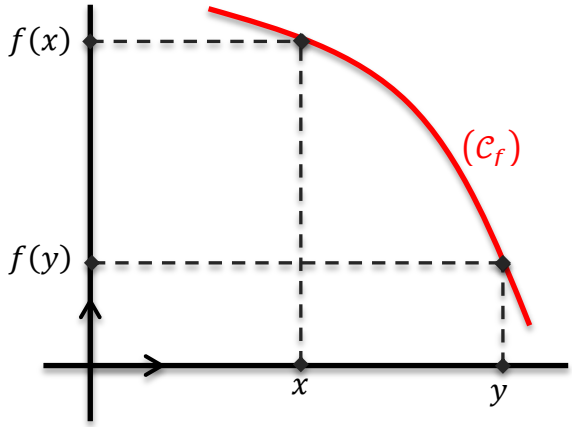
Définition 1

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- On dit que f est ***croissante*** sur I si : $\forall (x;y) \in I^2 : \ x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$.
- On dit que f est ***décroissante*** sur I si : $\forall (x;y) \in I^2 : \ x \leq y \implies f(x) \geq f(y)$.
- On dit que f est ***constante*** sur I si : $\forall (x;y) \in I^2 : \ f(x) = f(y)$.



f est croissante



f est décroissante

Remarque :

- On peut également étudier la monotonie d'une fonction f sur un intervalle I, en étudiant le signe du taux d'accroissement $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$ où x et y sont deux réels distincts de I.
- On dit que f est monotone sur I si elle est soit croissante sur I, soit décroissante sur I.

2) L'image d'un intervalle par une fonction

Définition 2

Soit f une fonction définie sur un intervalle I inclus dans $\mathcal{D}_f$.

On appelle l'image de I par la fonction f, notée $f(I)$, l'ensemble des images $f(x)$ des éléments x de I :

$$f(I) = \{f(x) \ / \ x \in I\}$$

Remarque :

Généralement, pour déterminer l'image d'un intervalle I, on utilise la monotonie de f.

- Si f est croissante sur $[a;b]$, alors $f([a;b]) = [f(a);f(b)]$.
- Si f est décroissante sur $[a;b]$, alors $f([a;b]) = [f(b);f(a)]$.
- Si f change sa monotonie sur $[a;b]$, alors $f([a;b]) = [m;M]$ où m est le minimum de f et M est le maximum de f sur $[a;b]$.

Application :

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-7;9]$ dont le tableau de variations est le suivant:

x	-7		0		2		5		9
f	4	↘	-2	↗	6	↘	-3	↗	1

Déterminer : $f([0;2])$; $f([-7;0])$; $f([2;5])$; $f([2;9])$ et $f([-7;9])$.

VI- La composée de deux fonctions

1) La composée de deux fonctions

Définition

Soit f et g deux fonctions définies respectivement sur $\mathcal{D}_f$ et $\mathcal{D}_g$.

On pose : $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} / x \in \mathcal{D}_f \text{ et } f(x) \in \mathcal{D}_g\}$.

La fonction h définie sur $\mathcal{D}$ par : $h(x) = g(f(x))$ est appelée composée des fonctions f et g dans cet ordre. Elle est notée $g \circ f$ et se lit : g rond f.

Application :

Soit f et g les deux fonctions définies par : $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = \frac{x+3}{x-2}$.

① Calculer : $g \circ f(9)$; $g \circ f(3)$ et $f \circ g(3)$.

② Donner l'expression de chacune des fonctions : $g \circ f$ et $f \circ g$.

Remarque :

Généralement, la composée de deux fonctions n'est pas commutative,

c-à-d : $g \circ f \neq f \circ g$.

2) Monotonie de la composée de deux fonctions monotones

Propriété :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et g une fonction définie sur I tel que $f(I) \subset J$.

- Si f et g ont le même sens de variation respectivement sur I et J, alors la fonction $g \circ f$ est croissante sur I.
- Si f et g ont des sens de variation différents respectivement sur I et J, alors la fonction $g \circ f$ est décroissante sur I.

Application :

Déterminer les variations de la fonction $g \circ f$ sachant que :

tableau de variations de la fonction f

x	-10		-2		9		20
f	3	↘	2	↘	0	↘	-3

tableau de variations de la fonction g

x	-6		0		2		3
g	1	↗	5	↘	0	↗	10

VII- Représentation graphique de fonctions de référence

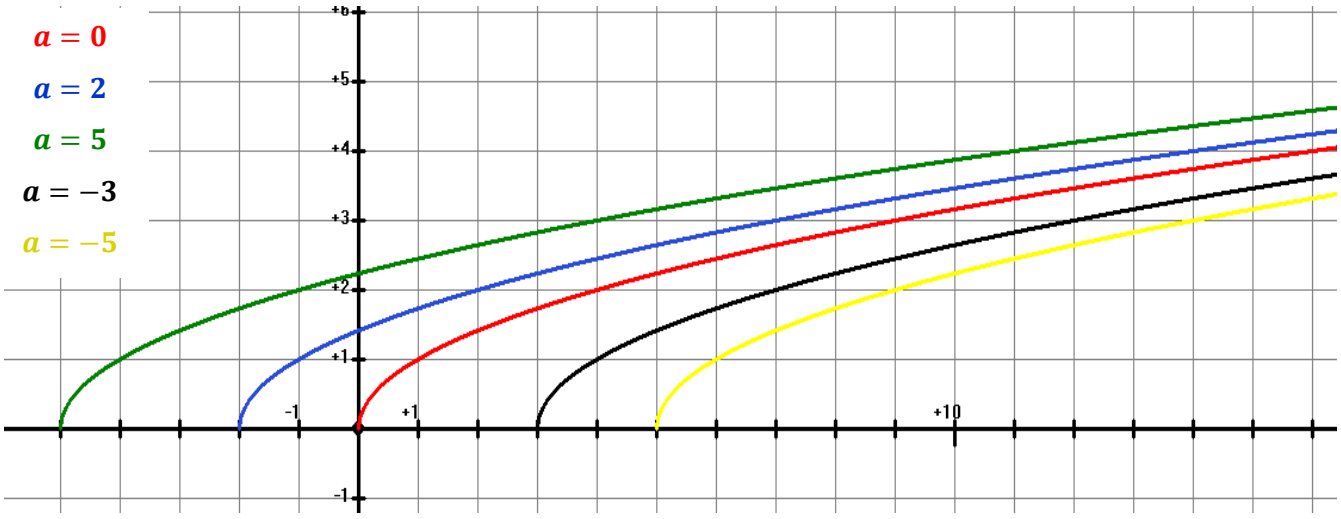
1) Représentation graphique de la fonction : $x \mapsto \sqrt{x+a}$ où $a \in \mathbb{R}$

On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x+a}$, où a est un réel, et soit $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

- Domaine définition de f est : $\mathcal{D}_f = [-a; +\infty[$.
- La fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[-a; +\infty[$.
- Le tableau de variations de f sur $[-a; +\infty[$:

x	$-a$		$+\infty$
f	0	↗	$+\infty$

- La courbe de f est la translation de la courbe de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ par la translation de vecteur $-a\vec{i}$.



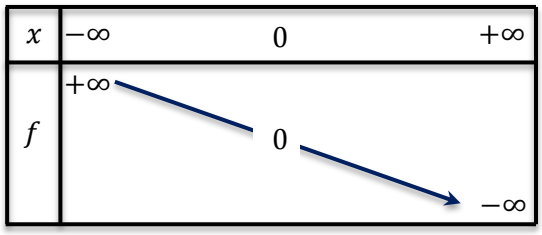
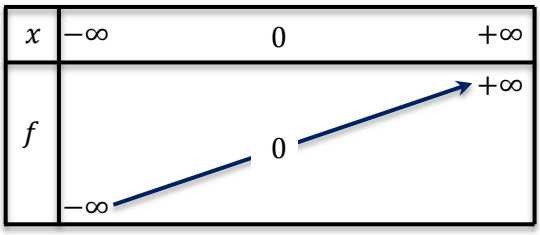
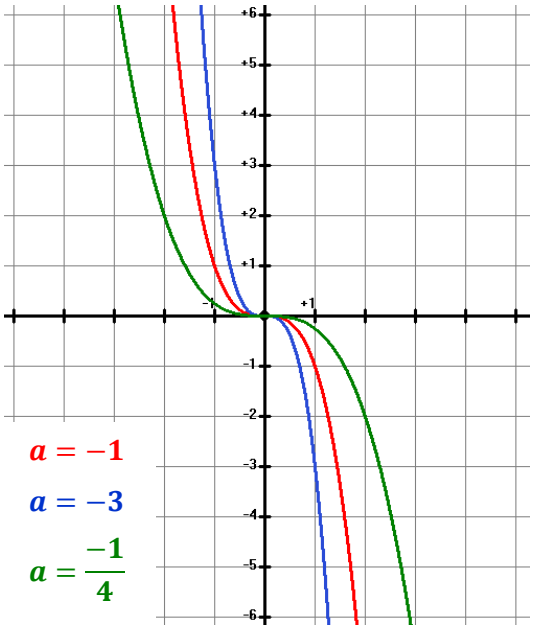
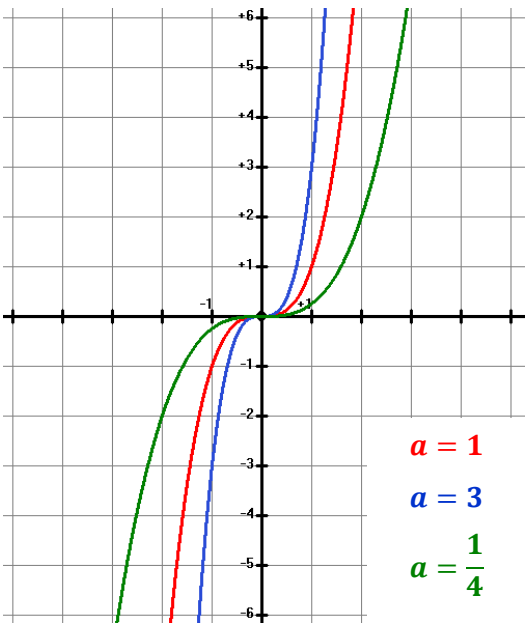
Application :

Etudier et représenter dans un repère orthonormé la fonction f définie par :

$f(x) = \sqrt{x-2}$.

2) Représentation graphique de la fonction : $x \mapsto ax^3$ où $a \in \mathbb{R}^*$

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^3$, où a est un réel non nul, et soit $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

	$a < 0$	$a > 0$
tableau de variations de f	f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$	f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
		
Représentation graphique		

Application :

Etudier et représenter dans un repère orthonormé la fonction f définie par :

$f(x) = -2x^3$.