Etude analytique de l'espace

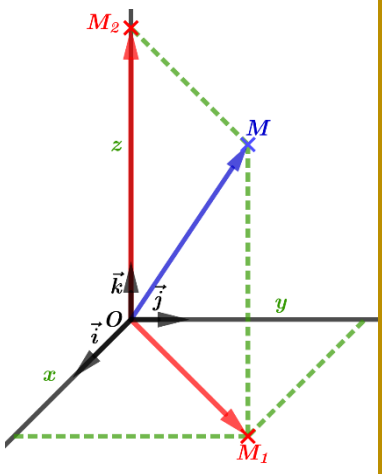
Remarques

I. Coordonnées d'un point dans un repère -Coordonnées d'un vecteur dans une base :

O, I, J et K sont quatre points non coplanaires.

On pose $\overrightarrow{OI} = \vec{\imath}$, $\overrightarrow{OJ} = \vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{OK} = \vec{k}$.

On a $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$. Comme $\overrightarrow{OM_1} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{OM_2} = z\vec{k}$, alors $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$.



- Le triplet $(\vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$ est appelé une ***base*** de l'espace.
- Le quadruplet $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$ est appelé un ***repère*** de l'espace.
- Le triplet $(x; y; z)$ est appelé ***coordonnées*** du point M dans le repère $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$ et on écrit $M(x; y; z)$.(x, y et z sont appelés respectivement l'***abscisse***, l'***ordonnée*** et la ***côte*** du point M).
- Le triplet $(x; y; z)$ est appelé triplet de ***coordonnées*** du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base $(\vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$ et on note $\overrightarrow{OM}(x; y; z)$.

Propriété :

Soient $\vec{u}(x; y; z)$ et $\vec{v}(x'; y'; z')$ deux vecteurs de l'espace muni d'une base $(\vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$ et λ un réel.

✓ $\vec{u} = \vec{v}$ si et seulement si $x = x'$, $y = y'$ et $z = z'$.

✓ $\vec{u} + \vec{v}(x + x'; y + y'; z + z')$.

✓ $\lambda\vec{u}(\lambda x; \lambda y; \lambda z)$.

Soient $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$ deux points de l'espace muni d'un repère $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$ et I le milieu du segment $[AB]$.

✓ Le triplet de coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ est $(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$.

✓ Le triplet de coordonnées du point I est $\left(\frac{x_A+x_B}{2}; \frac{y_A+y_B}{2}; \frac{z_A+z_B}{2}\right)$.

Application ① :

On considère dans l'espace rapporté au repère $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$ le point $M(1; -2; 3)$ et les vecteurs $\overrightarrow{OK} = 3\vec{k}$ et $\overrightarrow{OM'} = \vec{\imath} - 2\vec{\jmath}$ et A est le milieu des segment $[KM]$.

1. Déterminer les coordonnées des points O, K, M' et A.
2. Donner les coordonnées du vecteur $-2\overrightarrow{KM}$.
3. Montrer $OKMM'$ est un parallélogramme.

II. Déterminant de trois vecteurs :

Dans toute la suite, l'espace est rapporté à un repère $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; k)$.

1. Condition analytique de colinéarité de deux vecteurs :

Propriété :

Soient $\vec{u}(a; b; c)$ et $\vec{v}(a'; b'; c')$ deux vecteurs non nuls.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement s'il existe un nombre réel k tel que :

$a' = ka$ et $b' = kb$ et $c' = kc$.

Remarque :

Si toutes les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas nuls, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires équivaut à $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$.

Exemple :

Les vecteurs $\vec{u}(-2; 8; 6)$ et $\vec{v}\left(\frac{1}{4}; -1; -\frac{3}{4}\right)$ sont colinéaires du fait que $\frac{-2}{\frac{1}{4}} = \frac{8}{-1} = \frac{6}{-\frac{3}{4}}$

Propriété :

Soient $\vec{u}(a; b; c)$ et $\vec{v}(a'; b'; c')$ deux vecteurs de l'espace.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = 0$ et $\begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} = 0$ et $\begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} = 0$.

O Conséquence :

Les vecteurs $\vec{u}(a;b;c)$ et $\vec{v}(a';b';c')$ ne sont pas colinéaires si et seulement si $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} \neq 0$ ou $\begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} \neq 0$ ou $\begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} \neq 0$.

O Exemple :

- Les vecteurs $\vec{u}(0;-3;6)$ et $\vec{v}(0;1;-2)$ sont colinéaires. En effet $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 0$ et $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = 0$ et $\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = 0$.
- Les vecteurs $\vec{u}(1;1;2)$ et $\vec{v}(1;0;1)$ ne sont pas colinéaires du fait que $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$.

Application ② :

1. Etudier la colinéarité des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans les cas suivants :
   a. $\vec{u}\left(2;\sqrt{2};\sqrt{8}\right)$ et $\vec{v}\left(\sqrt{2};1;2\right)$.
   b. $\vec{u} = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + 2\vec{k}$ et $\vec{v} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 3\vec{k}$.
2. Etudier l'alignement des points $A(1;2;3), B(-1;3;2)$ et $C(3;-2;1)$.

2. Vecteurs coplanaires :

Définition :

Soient $\vec{u}(a;b;c)$, $\vec{v}(a';b';c')$ et $\vec{w}(a";b";c")$ trois vecteurs de l'espace.
Le nombre réel $a(b'c" - c'b") - b(a'c" - c'a") + c(a'b" - b'a")$est appelé déterminant des vecteurs $\vec{u}$,$\vec{v}$ et $\vec{w}$,et on le note par $det(\vec{u};\vec{v};\vec{w})$.

On écrit: $det(\vec{u};\vec{v};\vec{w}) = \begin{vmatrix} a & a' & a" \\ b & b' & b" \\ c & c' & c" \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} b' & b'' \\ c' & c" \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} a' & a'' \\ c' & c" \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} a' & a'' \\ b' & b" \end{vmatrix}$.

O Exemple :

Calculons $det(\vec{u};\vec{v};\vec{w})$ sachant que $\vec{u}\ (-1;2;1)$, $\vec{v}\ (1;-3;2)$ et $\vec{w}\ (-1;1;4)$.

Propriété :

- Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace.

$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si $det(\vec{u};\vec{v};\vec{w}) = 0$.

- Soient A, B, Cet D quatre points de l'espace.

A, B, Cet D sont coplanaires si et seulement si $det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD}\right) = 0$.

Application ③ :

1. Déterminer si les vecteurs $\vec{u}\ (1;2;3)$, $\vec{v}\ (-2;1;-3)$ et $\vec{w}\ (1;2;-1)$ sont coplanaires.
2. Soient $A(2;3;4), B(3;4;5), C(4;2;5)$et $D(3;4;4)$ quatre points de l'espace.

Montrer que les points A, B, Cet Dsont coplanaires.

III. Représentation paramétrique d'une droite :

1. Définition :

Définition

Soient $A(x_A;y_A;z_A)$ un point de l'espace et $\vec{u}(a;b;c)$ un vecteur non nul.
Le système $\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$ est appelé représentation paramétrique de la droite $D(A;\vec{u})$ passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

Application ④ :

1. Donner dans chaque cas une représentation paramétrique de la droite (D) :
   a. $(D) = D(A;\vec{u})$ où $A(1;-1;1)$ et $\vec{u}(1;3;-2)$.
   b. (D) est la droite passant par les points $A(1;2;-1)$ et $B(-1;1;2)$.
   c. (D) est la droite passant par $A(-2;1;3)$ et parallèle à la droite (Δ) telle que :

$(\Delta): \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 + 2t \\ z = 5 - 3t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$.

2. **a.** Donner Trois points de la droite (L): $\begin{cases} x = t \\ y = 3 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$.

b. Est que le point $M(3; 0; 1)$ appartient à (L) ?

2. Positions relatives de deux droites :

Propriété :

Soient $(D) = D(A; \vec{u})$ et $(\Delta) = D(B; \vec{v})$ deux droites de l'espace.

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et $B \in (D)$ou $A \in (\Delta)$, alors (D) et (Δ) sont confondues.

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et $A \notin (\Delta)$ ou $B \notin (D)$, alors (D) et (Δ) sont strictement parallèles.

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires et $det(\overrightarrow{AB}; \vec{u}; \vec{v}) = 0$, alors (D) et (Δ) sont sécantes en un point.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires et $det(\overrightarrow{AB}; \vec{u}; \vec{v}) \neq 0$, alors (D) et (Δ) ne sont pas coplanaires.

Application ⑤ :

Etudier la position relative des droites (D)et (Δ) dans chacun des cas suivants :

1. $D\left(A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}; \vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}\right)$et $D\left(B\begin{pmatrix}0\\-4\\-3\end{pmatrix}; \vec{v}\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}\right)$.

2. (D): $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$ et (Δ): $\begin{cases} x = 3 + t' \\ y = -1 + 2t' \\ z = 3 - t' \end{cases} ; t' \in \mathbb{R}$.

3. (D): $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = -2 + t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$ et (Δ): $\begin{cases} x = 1 - t' \\ y = 1 + t' \\ z = 6 + t' \end{cases} ; t' \in \mathbb{R}$.

IV. Représentation paramétrique - Equation cartésienne d'un plan :

1. Représentation paramétrique d'un plan :

Soient $A(x_A; y_A; z_A)$ un point de l'espace, $\vec{u}(a; b; c)$ et $\vec{v}(a'; b'; c')$deux vecteurs non colinéaires.

Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace et soit $(P) = P(A; \vec{u}; \vec{v})$.

On a : $M \in (P) \Leftrightarrow (\exists t \, et \, t' \in \mathbb{R}): \overrightarrow{AM} = t\,\vec{u} + t'\,\vec{v}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = x_A + at + a't' \\ y = y_A + bt + b't' \\ z = z_A + ct + c't' \end{cases} ; (t; t') \in \mathbb{R}^2.$$

Ce système est appelé une représentation paramétrique du plan $P(A; \vec{u}; \vec{v})$.

Application ⑥ :

Donner une représentation paramétrique du plan (P) dans chacun des cas suivants :

1. (P) est le plan passant par $A(1; 2; 3)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}(1; -1; 2)$ et $\vec{v}(-3; 2; 1)$.

2. (P) est le plan passant par les points $A(1; 2; 3), B(-1; 0; 1)$et $C(3; 2; -1)$

2. Equation cartésienne d'un plan :

Définition :

Soit A un point de l'espace, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non colinéaires.

L'équation cartésienne du plan (P) passant par A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ s'écrit sous la forme $ax + by + cz + d = 0$ où a, b, c et d sont des réels tels que $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$.

Remarque :

L'ensemble des points Mde l'espace qui vérifient $det(\overrightarrow{AM}; \vec{u}; \vec{v}) = 0$ est le plan passant par A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Application ⑦ :

Donner une équation cartésienne du plan (P) dans chacun des cas suivants :

1. (P) est le plan passant par $A(1; 2; 3)$et de vecteurs directeurs $\vec{u}(1; -1; 2)$ et $\vec{v}(-3; 2; 1)$.

2. (P) est le plan passant par les points $A(1;2;3), B(-1;0;1)$et $C(3;2;-1)$.

3. Positions relatives de deux plans :

Propriété :

Soient $(P) = P(A;\vec{u};\vec{v})$ et $(Q) = P(B;\overrightarrow{u'};\overrightarrow{v'})$ deux plans de l'espace.

- Si $det(\vec{u};\vec{v};\overrightarrow{u'}) = 0$ et $det(\vec{u};\vec{v};\overrightarrow{v'}) = 0$ alors (P) et (Q)sont confondus ou strictement parallèles.
- $det(\vec{u};\vec{v};\overrightarrow{u'}) \neq 0$ ou $det(\vec{u};\vec{v};\overrightarrow{v'}) \neq 0$ alors (P) et (Q)se coupent suivant une droite.

Remarque :

Soient $(P): ax + by + cz + d = 0$ et $(Q): a'x + b'y + c'z + d' = 0$ deux plans de l'espace.

- Les plans (P)et (Q)se coupent suivant une droite si et seulement si $ab' - ba' \neq 0$ ou $ac' - ca' \neq 0$ou $bc' - cb' \neq 0$.
- Les plans (P)et (Q) sont confondus si et seulement s'il existe un réel k non nul tel que : $a' = ka$ et $b' = kb$ et $c' = kc$ et $d' = kd$.
- Les plans (P) et (Q) sont strictement parallèles si et seulement s'il existe un réel $k$non nul tel que : $a' = ka$ et $b' = kb$et $c' = kc$ et $d' \neq kd$.

Application ⑧ :

Etudier la position relative des plans (P) et (Q) dans les cas suivants :

1. $(P): 2x + 3y - z + 1 = 0$ et $(Q): -x + 2y + z - 2 = 0$.

2. $(P): 2x - y + z - 1 = 0$ et $(Q): 6x - 3y + 3z - 3 = 0$.

V. Deux équations cartésiennes d'une droite :

1. Equations cartésiennes d'une droite dans l'espace :

Définition et propriété :

Soit (D) une droite passant par le point $A(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a;b;c)$.

- Si $a \neq 0, b \neq 0$ et $c \neq 0$, alors le système $\frac{x-x_A}{a} = \frac{y-y_A}{b} = \frac{z-z_A}{c}$ est appelé ***équations cartésiennes*** de la droite (D).
- Si l'un des nombres (un seul) est nul, (par exemple $a = 0$ et $b \neq 0$ et $c \neq 0$) alors le système $\begin{cases} x = x_A \\ \frac{y-y_A}{b} = \frac{z-z_A}{c} \end{cases}$ est appelé ***équations cartésiennes*** de la droite (D).
- Si deux de ces nombres sont nuls (par exemple $a = 0$ et $b = 0$ et $c \neq 0$) alors le système$\begin{cases} x = x_A \\ y = y_A \end{cases}$est appelé ***équations cartésiennes*** de la droite (D).

Application ⑨ :

1. Déterminer deux équations cartésiennes de la droite (D) passant par les points $A\ (1;-2;3)$ et $B(-2;-1;4)$.

2. Déterminer deux équations cartésiennes de la droite (D'): $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 \\ z = -3t \end{cases}; t \in \mathbb{R}$.

3. Donner une représentation paramétrique de la droite (Δ) définie par les équations $\frac{x-2}{3} = y + 4 = \frac{1-z}{2}$.

2. Positions relatives d'une droite et d'un plan :

Propriété :

Soit une droite $(D) = D(A;\vec{w})$ et un plan $(P) = P(B;\vec{u};\vec{v})$.

- Si $det(\vec{u};\vec{v};\vec{w}) = 0$ et $A \in (P)$, alors $(D) \subset (P)$.
- Si $det(\vec{u};\vec{v};\vec{w}) = 0$ et $A \notin (P)$, alors (D) est strictement parallèle à (P).
- Si $det(\vec{u};\vec{v};\vec{w}) \neq 0$, alors (D) perce le plan (P).

Application ⑩ :

Etudier la position relative du plan (P) et la droite (D) dans chacun des cas suivants :

1. $(P): x + y - z + 1 = 0$ et $(D): \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases}; t \in \mathbb{R}$

2. $(P): 5x + 2y - 3z - 10 = 0$ et $(D): \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = -2 + 4t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$

Exercice de synthèse :

On considère les points les points $A(2; 1; -1)$, $B(1; 0; 0)$, $C(-1; 1; 0)$ et $E(0; 2; -1)$.

1. a- Etudier la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
b- Donner une équation cartésienne du plan (ABC).
c- Vérifier que les points A, B, C et E sont coplanaires.

2. Soit (Δ) la droite passant par O et de vecteur directeur $\vec{u} = \frac{1}{3}\vec{\imath} + \frac{1}{6}\vec{\jmath} + \frac{1}{9}\vec{k}$.
a- Donner une représentation paramétrique de la droite (Δ).
b- Donner deux équations cartésiennes de la droite (Δ).
c- Montrer que la droite (Δ) perce le plan (ABC) puis déterminer le triplet des coordonnées de leur point d'intersection Ω.

3. On considère le plan (P) d'équation $x + y + 2z = 0$.
a- Montrer que (ABC) et (P) se coupent suivant une droite (Δ').
b- Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ').

4. Etudier la position relative des deux droites (Δ) et (Δ').