Géométrie analytique dans l'espace

I. Coordonnées d'un point dans un repère – Coordonnées d'un vecteur dans une base

1. Base et repère dans l'espace :

Définition

Soient O, I, J et K quatre points non coplanaires.

On pose $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$, $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$ et $\overrightarrow{OK} = \vec{k}$

* Le triplet $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ est appelé une base de l'espace.

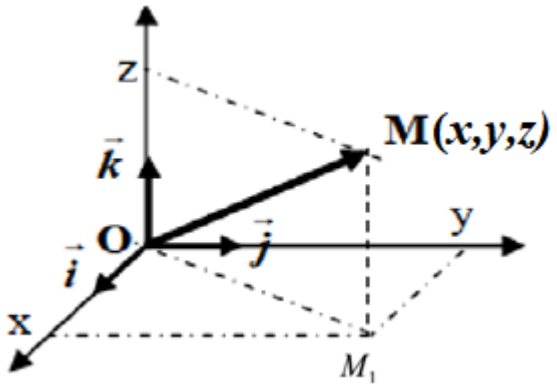
* Le quadruplet $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ est appelé un repère de l'espace.

Remarque :

- Si $(OI) \perp (OJ)$, $(OJ) \perp (OK)$et $(OI) \perp (OK)$ et $OI = OJ = OK = 1u$ alors $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ est un repère orthonormé.
- Quatre points non coplanaires O, A, B et C déterminent une base de l'espace.

Par exemple$(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OC})$, et un repère de l'espace par exemple$(O; \overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OC})$.

2. Coordonnées d'un point dans un repère – coordonnées d'un vecteur dans une base



D'après la relation de Chasles

On a $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1M} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

Propriété

Soit $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ un repère de l'espace.

- Pour tout point M de l'espace, il existe unique triplet $(x; y; z)$ de réels que : $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$
- Pour tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace, il existe unique triplet de réels $(x; y; z)$ tel que : $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$
- Le triplet $(x; y; z)$ est appelé triplet de coordonnées du point M dans le repère$(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.
- x est l'abscisse du point$M$, y est l'ordonnée du point$M$, z est la côte du point$M$, et on écrit : $M(x; y; z)$ ou $\overrightarrow{OM}(x; y; z)$.

▪ Le triplet $(x;y;z)$ est appelé triplet de coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ et on note $\vec{u}(x;y;z)$.

II. Déterminant de trois vecteurs :

1. Condition de colinéarité de deux vecteurs :

Activité

Soient $\vec{u}(x;y;z)$ et $\vec{v}(x';y';z')$ deux vecteurs de l'espace tels que x, y, z, x', y' et z' sont des nombres réels non nuls.

1) Montrer que : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'}$

2) Montrer que : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $xy' - yx' = 0$ et $xz' - zx' = 0$ et $yz' - zy' = 0$

Propriétés

Soient $\vec{u}(x;y;z)$ et $\vec{v}(x';y';z')$ deux vecteurs non nuls.

* Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont ***colinéaires*** si et seulement s'il existe un nombre réel k tel que : $x = kx'$ et $y = ky'$ et $z = kz'$ (condition géométrique).
* Soient $\vec{u}(x;y;z)$ et $\vec{v}(x';y';z')$ deux vecteurs non nuls, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont ***colinéaires*** si et seulement si $xy' - x'y = 0$, $xz' - x'z = 0$ et $yz' - y'z = 0$ (condition analytique).

Autrement dit

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ***sont colinéaires*** si et seulement si $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = 0$ et $\begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} = 0$ et $\begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} = 0$.
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ***ne sont pas colinéaires*** si et seulement si $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \neq 0$ ou $\begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} \neq 0$ ou $\begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \neq 0$

2. Déterminant de trois vecteurs

Soient $\vec{u}(x;y;z)$, $\vec{v}(x';y';z')$ et $\vec{w}(x'';y'';z'')$ trois vecteurs de l'espace.

Le nombre réel $\begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} x' & x'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix} = x(y'z'' - z'y'') - y(x'z'' - z'x'') + z(x'y'' - y'x'')$ est appelé déterminant des vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$, et on le note $det(\vec{u};\vec{v};\vec{w})$.

Exemple

Calculer $det(\vec{u};\vec{v};\vec{w})$ tels que $\vec{u}(1;2;3)$, $\vec{v}(3;1;2)$ et $\vec{w}(2;3;1)$

$$det(\vec{u};\vec{v};\vec{w}) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1(1-6) - 2(3-4) + 3(9-2)$$
$$= -5 + 2 + 21 = 18$$

3. Vecteurs coplanaires

Propriété

Soient $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace.

$\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si $det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) = 0$.

Exemples

⇨ On considère les vecteurs : $\vec{u}(1,1,0), \vec{v}(1,0,1)$ et $\vec{w}(0,1,1)$

On a : $det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 2 = 1$

Or $det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) \neq 0$ donc les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires.

Application ①

1) On considère les vecteurs $\vec{u}(2; 1; 4), \vec{v}(1; -1; 1)$ et $\vec{w}(1; 2; 3)$.
   Montrer que les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.
2) On considère les vecteurs $\vec{u}(1 + m; 1; 2m - 1), \vec{v}(1; -1; 1)$ et $\vec{w}(1; 2; 3)$.

Déterminer $m$pour que les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ soient coplanaires.

III. Représentation paramétrique d'une droite – Deux équations cartésiennes d'une droite.

1. Représentation paramétrique d'une droite

Activité

On considère les points $A(1; 2; -1), B(-1; 3; 1), C(5; 0; -5)$ et $E(1; 3; 0)$.

Soit $M(x; y; z)$ un point de l'espace.

1) Montrer que si $M \in (AB)$ alors $(\exists t \in \mathbb{R})$ tel que $(S)\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 + t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$ le système est une représentation paramétrique de la droite (AB)
2) Montrer que $C \in (AB)$.
3) Le point E appartient-il à la droite (AB) ?

Propriété

Soit $A(x_A; y_A; z_A)$ un point de l'espace et soit $\vec{u}(a; b; c)$ un vecteur non nul.

Le système $\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases} /(t \in \mathbb{R})$ est appelé ***représentation paramétrique*** de la droite $D(A, \vec{u})$ passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$

Exemple

$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$; $(t \in \mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de la droite $D(A, \vec{u})$ où $A(1;1;1)$ et $\vec{u}(1;2;3)$

2. Deux équations cartésiennes d'une droite :

Définition et propriété :

Soit (D) une droite passant par le point $A(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a;b;c)$.

- Si $a \neq 0, b \neq 0$ et $c \neq 0$ alors le système $\frac{x-x_A}{a} = \frac{y-y_A}{b} = \frac{z-z_A}{c}$ s'appelle deux équations cartésiennes de la droite (D)
- Si l'un des nombres (un seul) a ou bien b ou bien c est nul (par exemple $a = 0$ et $b \neq 0$ ou bien $c \neq 0$) alors, le système $\begin{cases} x = x_A \\ \frac{y-y_A}{b} = \frac{z-z_A}{c} \end{cases}$ est appelé ***équations cartésiennes*** de la droite (D)
- Si deux de ces nombres sont nuls (par exemple $a = 0$ et $b = 0$ ou bien $c \neq 0$) alors le système $\begin{cases} x = x_A \\ y = y_A \end{cases}$ est appelé ***équations cartésiennes*** de la droite (D).

Exemples

⇨ Soit (D_1) la droite passant par le point $A(1;-2;3)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(4;5;6)$

On a : $M(x;y;z) \in D_1(A, \vec{u}) \Leftrightarrow \frac{x-1}{4} = \frac{y+2}{5} = \frac{z-3}{6}$

Donc $\begin{cases} \frac{x-1}{4} = \frac{y+2}{5} \\ \frac{y+2}{5} = \frac{z-3}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5(x-1) = 4(y+2) \\ 6(y+2) = 5(z-3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 4y - 13 = 0 \\ 6y - 5z + 27 = 0 \end{cases}$ Sont deux équations cartésiennes de la droite (D_1).

⇨ Soit (D_2) la droite passant par le point $B(1;1;2)$ et de vecteur directeur $\vec{v}(4;0;6)$.

On a $M(x;y;z) \in D_2(A, \vec{v}) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-1}{4} = \frac{z-2}{6} \\ y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 6 = 4z - 8 \\ y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 4z + 2 = 0 \\ y - 1 = 0 \end{cases}$ sont deux équations cartésiennes de la droite (D_2).

Application ②

1) Déterminer deux équations cartésiennes de la droite (D) passant par le point $A\left(-1;-2;\frac{1}{3}\right)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}\left(-2;\frac{1}{2};1\right)$.
2) Soit (Δ) une droite définie par ses deux équations cartésiennes suivantes $\frac{2x-1}{3} = \frac{3y-2}{-2} = \frac{z-1}{2}$

a) Déterminer un vecteur directeur de la droite (Δ) et un point de (Δ).

b) Déduire une représentation paramétrique de la droite (Δ).

IV. Représentation paramétrique d'un plan – Equation cartésienne d'un plan

1. Représentation paramétrique d'un plan

Activité

On considère les points $A(1;2;3), B(-1;3;1)$ et $C(3;3;-1)$.

1) Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2) Soit $M(x;y;z)$ un point de l'espace.

Montrer que $M \in (ABC) \Leftrightarrow (\exists (t;t') \in \mathbb{R}^2): \begin{cases} x = 1 - 2t + 2t' \\ y = 2 + t + t' \\ z = 3 - 2t + 4t' \end{cases}$ le système est une ***représentation paramétrique*** du plan (ABC).

3) En déduire que $M(x;y;z) \in (ABC) \Leftrightarrow x + 6y + 2z - 19 = 0$

L'équation $x + 6y + 2z - 19 = 0$ est appelé une appelé une ***équation cartésienne*** du plan(ABC).

Définition

Soit $A(x_A;y_A;z_A)$ un point de l'espace, $\vec{u}(a;b;c)$ et $\vec{v}(a';b';c')$ deux vecteurs ***non colinéaires***.

Le système $\begin{cases} x = x_A + at + a't' \\ y = y_A + bt + b't' \\ z = z_A + ct + c't' \end{cases} / \left((t,t') \in \mathbb{R}^2\right)$ est appelé une ***représentation paramétrique*** du plan $P(A;\vec{u};\vec{v})$ passant par A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et$\vec{v}$.

Exemple

Déterminer une représentation paramétrique du plan $P(A;\vec{u};\vec{v})$ tel que $A(2;-1;3)$ et $\vec{u}(1;-2;1)$ et $\vec{v}(-2;4;5)$.

Soit $M(x;y;z)$ un point de l'espace.

$$M(x;y;z) \in P \Leftrightarrow (\exists (t;t') \in \mathbb{R}^2): \begin{cases} x = 2 + 1t - 2t' \\ y = -1 - 2t + 4t' \\ z = 3 + 1t + 5t' \end{cases} / \left((t,t') \in \mathbb{R}^2\right)$$

2. Equation cartésienne d'un plan

Définition

Soit A un point de l'espace, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non colinéaires.

L'équation cartésienne du plan (P) passant par A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ s'écrit sous la forme $ax + by + cz + d = 0$ où a, b, c et d sont des réels tels que $(a;b;c) \neq (0;0;0)$

Remarque :

L'ensemble des points $M(x;y;z)$de l'espace qui vérifient $det(\overrightarrow{AM};\vec{u};\vec{v}) = 0$ est un plan passant par A et dirigé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Exemple

Déterminer une équation cartésienne du plan P qui passe par le point $A(1;-2;1)$ et dirigé par les vecteurs $\vec{u}(1;-2;1)$ et $\vec{v}(1;1;3)$.

$M(x;y;z) \in P \Leftrightarrow det(\overrightarrow{AM};\vec{u};\vec{v}) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ y+2 & -2 & 1 \\ z-1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (x-1)\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - (y+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + (z-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow -7(x-1) - 2(y+2) + 3(z-1) = 0 \Leftrightarrow -7x - 2y + 3z = 0$

Donc $-7x - 2y + 3z = 0$ est une équation cartésienne du plan P .

V. Positions relatives de deux droites - Positions relatives de deux plan – Positions relatives d'une droite et un plan

1. Positions relatives de deux droites dans l'espace

Propriété

Soient $(D) = D(A;\vec{u})$ et $(\Delta) = \Delta(B;\vec{v})$ deux droites de l'espace.

* Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et $A \in (\Delta)$ ou $B \in (D)$ alors (D) et (Δ) sont confondues.

* Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et $A \notin (\Delta)$ ou $B \notin (D)$ alors (D) et (Δ) sont strictement parallèles.

* Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires et $det(\overrightarrow{AB};\vec{u};\vec{v}) = 0$ alors (D) et (Δ) sont sécantes (se coupent en un point).

* Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires et $det(\overrightarrow{AB};\vec{u};\vec{v}) \neq 0$ alors (D) et (Δ) ne sont pas coplanaires.

Remarque

Soient $A(x_A;y_A;z_A)$ et $B(x_B;y_B;z_B)$ deux points de l'espace, $\vec{u}(a;b;c)$ et $\vec{v}(a';b';c')$ deux vecteurs non nuls.

On considère les droites (D): $\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases}$, $(t \in \mathbb{R})$ et (Δ): $\begin{cases} x = x_B + a't' \\ y = y_B + b't' \\ z = z_B + c't' \end{cases}$, $(t' \in \mathbb{R})$

⇨ Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors (D) // (Δ)

⇨ Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires alors :

* (D) et (Δ) sont sécantes si et seulement si le système : (S): $\begin{cases} x_A + at = x_B + a't' \\ y_A + bt = y_B + b't' \\ z_A + ct = z_B + c't' \end{cases}$ ayant pour inconnues t et t' admet une solution unique.

* (D) et (Δ) ne sont pas coplanaires si et seulement si le système (S) n'admet aucune solution.

Application ③

Etudier les positions relatives de la droite (D) et la droite (Δ) dans les cas suivants :

$a)\bullet \quad (D):\begin{cases} x=-2+t \\ y=2-2t \\ z=4+t \end{cases}$; $(t\in\mathbb{R})$ et $(\Delta):\begin{cases} x=-1-t' \\ y=2t' \\ z=1+t' \end{cases}$, $(t'\in\mathbb{R})$

$b)\bullet \quad (D):\begin{cases} x=1+t \\ y=-2-2t \\ z=2+3t \end{cases}$; $(t\in\mathbb{R})$ et $(\Delta):\begin{cases} x=2t' \\ y=1-t' \\ z=3+t' \end{cases}$, $(t'\in\mathbb{R})$

$c)\bullet \quad (D):\begin{cases} x=1+t \\ y=-2 \\ z=2-t \end{cases}$; $(t\in\mathbb{R})$ et $(\Delta):\begin{cases} x=2t' \\ y=1 \\ z=3-2t' \end{cases}$, $(t'\in\mathbb{R})$

2. Positions relatives de deux plans

Propriété

Soient $(P)=P(A;\vec{u};\vec{v})$ et $(Q)=P(B;\vec{u'})$ deux plans de l'espace.

* Si $det(\vec{u};\vec{v};\vec{u'})$ et $det(\vec{u};\vec{v};\vec{v'})$ et $A\in(Q)$ ou $B\in(P)$ alors (P) et (Q) sont confondus

*Si $det(\vec{u};\vec{v};\vec{u'})$ et $det(\vec{u};\vec{v};\vec{v'})$ et $A\notin(Q)$ ou $B\notin(P)$ alors (P) et (Q) strictement parallèles.

* Si $det(\vec{u};\vec{v};\vec{u'})$ ou $det(\vec{u};\vec{v};\vec{v'})$ alors (P) et (Q) se coupent selon une droite.

Remarque

Soient (P) et (P') deux plans définis par leurs équations cartésiennes : $ax+by+cz+d=0$ et $a'x+b'y+c'z+d'=0$ où $(a;b;c)\neq(0;0;0)$ et$(a';b';c')\neq(0;0;0)$.

- Les plans (P) et (P') se coupent suivant une droite si et seulement si $ab'-ba'\neq 0$; $ac'-ca'\neq 0$ ou$bc'-cb'\neq 0$.
- Les plans (P) et (P') sont parallèles si et seulement s'il existe un réel k non nul tel que $a'=ka;b'=kb$ et$c'=kc$.
- Les plans (P) et (P') sont confondus si et seulement s'il existe un réel k non nul tel que :$a'=ka;b'=kb;c'=kc$ et$d'=kd$.

Application ④

Etudier la position relative du plan (P) et le plan (Q) dans les cas suivants :

$a)\bullet \quad (P):\begin{cases} x=1+2t+t' \\ y=2-t+t' \\ z=-1-t' \end{cases} /\left((t;t')\in\mathbb{R}^2\right)$; $(Q):\begin{cases} x=5+5t' \\ y=3+t+t' \\ z=2+t+3t' \end{cases} /\left((t;t')\in\mathbb{R}^2\right)$

$b)\bullet \quad (P): 2x+y-z+2=0$; $(Q): 3x+y-4z-1=0$

3. Positions relatives d'une droite et un plan

Propriété

Soit $(D)=D(A;\vec{w})$ une droite de l'espace et soit $(P)=P(B;\vec{u};\vec{v})$ un plan de l'espace.

*Si $det(\vec{u};\vec{v};\vec{w})=0$ et $A\in(P)$ alors $(D)\subset(P)$.

* Si $det(\vec{u};\vec{v};\vec{w})=0$ et$A\notin(P)$, alors (D) est strictement parallèle à (P)

* Si $det(\vec{u};\vec{v};\vec{w})\neq 0$ alors (D) perce le plan (P)

Exemple

Soit (P) le plan défini par l'équation cartésienne : $x+y-z+1=0$ et (D) la droite définie par la représentation paramétrique $\begin{cases} x=1+t \\ y=1-t \\ z=1+2t \end{cases}$; $(t\in\mathbb{R})$

Pour étudier l'intersection de (D) et (P) on résout le système : $(S)\begin{cases} x+y-z+1=0 & (1) \\ x=1+t & (2) \\ y=1-t & (3) \\ z=1+2t & (4) \end{cases}$

On remplace respectivement x, y et z par $1+t, 1-t$ et $1+2t$ dans l'équation (1) on obtient : $1+t+1-t-1-2t+1=0$ D'où $t=1$

Après remplacement dans les équations : $(2), (3)$ et (4) on trouve le triplet $(2;0;3)$ solution du système (S).

Donc (D) perce le plan (P) au point$M(2;0;3)$

Application ⑤

Etudier la position relative de la droite (D) et le plan (P) dans les cas suivants

$a)\bullet \quad (D):\begin{cases} x=2-4t \\ y=-1+2t/(t\in\square) \\ z=3t \end{cases}$; $(P): 3x+2y+z+1=0$

$b)\bullet \quad (D):\begin{cases} x=-4+5t \\ y=-1-2t/(t\in\square) \\ z=-3+t \end{cases}$; $(P): x+3y+z+4=0$