Chapitre 11

Géométrie dans l'espace

Niveau : 2ème Année Bac

PC & SVT

MATHEMATIQUES

~Prof : Bouyguir Taher~

Contenu du chapitre 11

I. Le produit scalaire de deux vecteurs dans l'espace 1

1. Le produit scalaire de deux vecteurs dans l'espace 1
2. Vecteurs orthogonaux 2
3. Produit scalaire et norme 2
4. Repère orthonormé -Base orthonormée de l'espace 3
5. Analytique du produit scalaire dans l'espace 4
6. L'ensemble des points dans l'espace tel que : $\vec{u}.\overrightarrow{AM} = k$ 4
7. Équation cartésienne d'un plan définit par un point et un vecteur normal .. 5
8. Positions relatives de deux plans 7
9. Distance d'un point à un plan 8

II. Étude analytique de la sphère 9

1. Définition d'une sphère 9
2. Équation cartésienne d'une sphère 9
3. La sphère définie par son diamètre 9
4. L'ensemble des points $M(x,y,z)$ tel que : 10
   $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$ 10
5. Représentation paramétrique d'une sphère 10
6. Positions relatives d'une sphère et d'un plan 11
7. Le plan tangent à une sphère en un point 12

III. Le produit vectoriel des deux vecteurs 13

1. Orientation de l'espace 13
2. Définition du produit vectoriel 13
3. Propriétés du produit vectoriel 14
4. L'expression analytique du produit vectoriel 14
5. Applications du produit vectoriel 15
   - 5.1. Alignement de trois points 15
   - 5.2. Surface d'un parallélogramme - Surface d'un triangle 15
   - 5.3. Équation d'un plan 16
   - 5.4. Intersection de deux plans 16
   - 5.5. Distance d'un point par rapport à une droite 17
   - 5.6. Positions relatives d'une sphère et d'une droite 17

I. Le produit scalaire de deux vecteurs dans l'espace

1. Le produit scalaire de deux vecteurs dans l'espace

Définition 1 :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace, et soient A, B et C trois points l'espace tels que :

$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$

Le **produit scalaire** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans l'espace est le produit scalaire de $\overrightarrow{AB}$ par $\overrightarrow{AC}$ dans le plan (ABC), noté $\vec{u}.\vec{v}$.

Remarques :

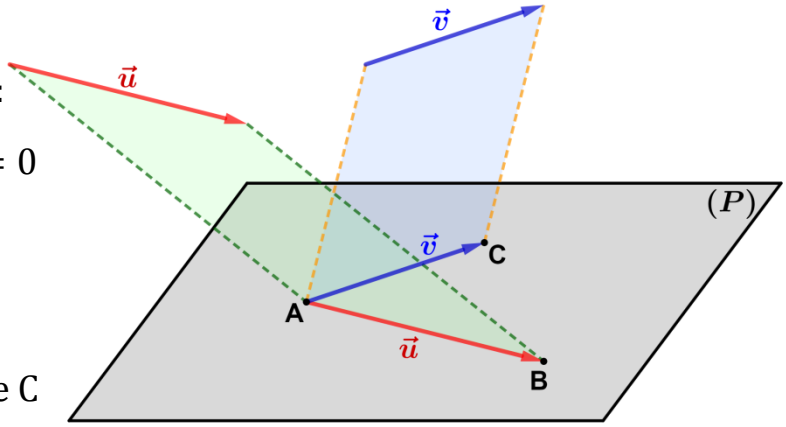
1. $\vec{u}.\vec{v}$ est un nombre réel définit par :

   ➢ Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, alors $\vec{u}.\vec{v} = 0$

   ➢ Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$,

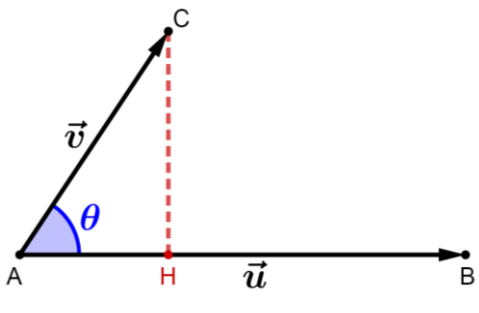
   alors $\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AB}$

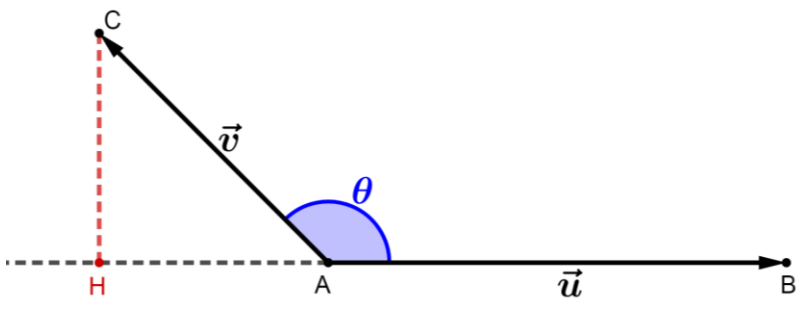
   où H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).



   c.à.d. $\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AH \times AB$ si : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont le même sens

   et $\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -AH \times AB$ si : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont un sens contraire





2. Toutes les propriétés du produit scalaire dans le plan sont aussi vraies dans l'espace.

Définition 2 :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.

On appelle **produit scalaire** de $\vec{u}$ par $\vec{v}$, noté $\vec{u}.\vec{v}$, le nombre réel définit par :

➢ $\vec{u}.\vec{v} = 0$, si l'un des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est nul

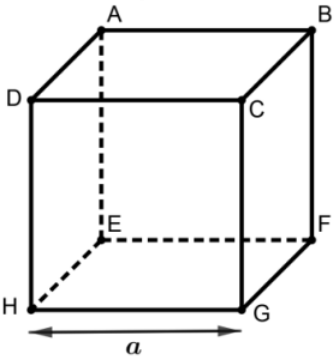
➢ $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{\vec{u}.\vec{v}})$, dans le cas contraire.

Application 1 :

Soit ABCDEFGH un cube de côté a.

Calculer les produits scalaires suivants :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DH}$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DG}$



2. Vecteurs orthogonaux

Définition 3 :

On dit que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** dans l'espace si : $\vec{u}.\vec{v} = 0$,
et on écrit : $\vec{u} \perp \vec{v}$.

3. Produit scalaire et norme

Définition 4 :

Soit $\vec{u}$ un vecteur de l'espace et A et B deux points tels que : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.
La **norme** du vecteur $\vec{u}$, notée $\|\vec{u}\|$ est la distance AB.

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}^2} = \sqrt{\vec{u}.\vec{u}} \quad \text{et} \quad \vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2 = AB^2$$

Propriétés :

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace et tout réel k, on a :

1) $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$	**2)** $\vec{u}.(k\vec{v}) = (k\vec{u}).\vec{v} = k(\vec{u}.\vec{v})$
3) $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$	**4)** $(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$
5) $(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$	**6)** $(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$
7) $\|\vec{u}\| = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$	**8)** $\|k\vec{u}\| = \|k\|\|\vec{u}\|$
9) $\|\vec{u}+\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{u}\|$	**10)** $\|\vec{u}.\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{u}\|$
11) $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2)$	**12)** $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$
13) Si A, B et C trois points de l'espace, alors : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$	

Application 2 :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace tels que : $\|\vec{u}\| = 3$ et $\|\vec{v}\| = \sqrt{3}$ et $\vec{u}.\vec{v} = -5$

1. Calculer $(\vec{u}+\vec{v})^2$, puis en déduire $\|\vec{u}+\vec{v}\|$.
2. Calculer $(\vec{u}+2\vec{v})(\vec{u}+\vec{v})$. Que peut-en déduire ?

4. Repère orthonormé -Base orthonormée de l'espace

Soit O un point de l'espace. On pose : $\vec{\imath} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{\jmath} = \overrightarrow{OJ}$ et $\vec{k} = \overrightarrow{OK}$

Définition 5 :

On dit qu'un triplet $(\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$ de vecteurs dans l'espace est une **base orthonormée** si et seulement si les vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ sont :

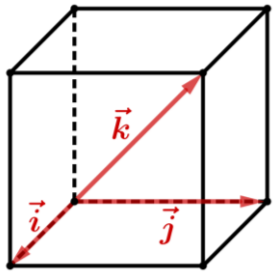
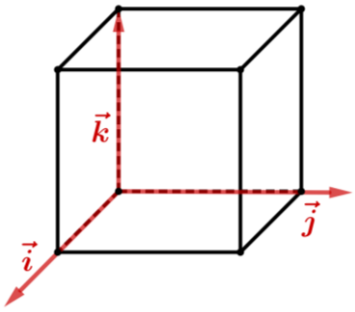
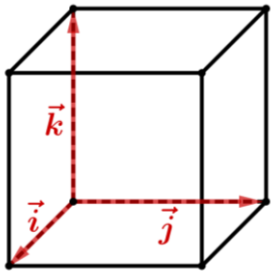
- non coplanaires
- normés $\left(\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = \|\vec{k}\| = 1\right)$
- orthogonaux deux à deux $\left(\vec{\imath}.\vec{\jmath} = \vec{\imath}.\vec{k} = \vec{\jmath}.\vec{k} = 0\right)$

Définition 6 :

On dit que $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$ est un **repère orthonormé** dans l'espace et seulement si $(\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$ est une base orthonormée.

Exemples :

La figure représente un cube dans les trois cas.

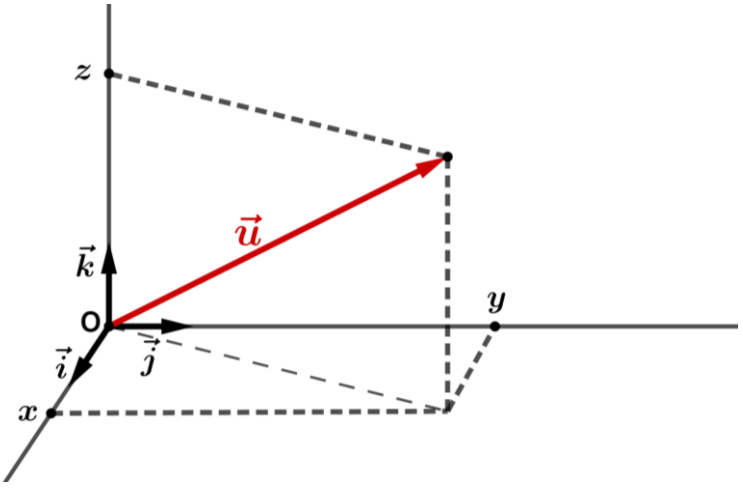
Base	Base orthogonale	Base orthonormale
		

Coordonnées d'un vecteur relativement à une base :

Si $(\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$ est une base orthonormée et $\vec{u}$ un vecteur de l'espace,

alors il existe un triplet unique $(x;y;z)$ de réels tel que : $\vec{u} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}$.

Ce triplet $(x;y;z)$ est appelé coordonnées du vecteur relativement à la base $(\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$.



Voyons maintenant comment exprimer le produit scalaire dans l'espace à l'aide des coordonnées des vecteurs.

5. Analytique du produit scalaire dans l'espace

Dans tout ce qui va suivre : $(\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$ est une base orthonormée.

Soient : $\vec{u} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}$ et $\vec{v} = x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath} + z'\vec{k}$ deux vecteurs de l'espace.

On a : $\vec{u}.\vec{v} = (x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}).(x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath} + z'\vec{k})$

$= xx'\,\vec{\imath}^2 + yy'\,\vec{\jmath}^2 + zz'\,\vec{k}^2$ car : $\vec{\imath}.\vec{\jmath} = \vec{\imath}.\vec{k} = \vec{\jmath}.\vec{k} = 0$

$= xx' + yy' + zz'$ car : $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = \|\vec{k}\| = 1$

On a donc la propriété suivante :

Propriété 1 :

- Dans une base orthonormée, on considère deux vecteurs $\vec{u}(x;y;z)$ et $\vec{v}(x';y';z')$

  alors : $\boldsymbol{\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'}$ et $\boldsymbol{\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

- Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé, soient A et B deux points de coordonnées respectives $A(x_A;y_A;z_A)$ et $B(x_B;y_B;z_B)$

  alors : $\boldsymbol{AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}}$

Application 3 :

On considère les vecteurs $\vec{u}(1;5;-1)$ et $\vec{v}(-5;1;0)$ et $\vec{w} = \frac{1}{2}\,\vec{\imath} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,\vec{k}$.

1. Est-ce que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux ?
2. Calculer la norme du vecteur $\vec{w}$.

Application 4 :

On considère les vecteurs $\vec{u}(3;-2;1)$ et $\vec{v}(2;1;0)$.

Calculer : $\cos(\widehat{\vec{u}.\vec{v}})$

6. L'ensemble des points dans l'espace tel que : $\vec{u}.\overrightarrow{AM} = k$

Propriété 2 :

Soit $\vec{u}(a;b;c)$ un vecteur non nul et $A(x_A;y_A;z_A)$ un point de l'espace et $k \in \mathbb{R}$.

L'ensemble des points $M(x;y;z)$ dans l'espace tel que : $\boldsymbol{\vec{u}.\overrightarrow{AM} = k}$ est un **plan** $(\mathcal{P})$ d'équation qui s'écrit sous la forme : $\boldsymbol{ax + by + cz + d = 0}$

Cette équation est appelée **équation cartésienne** du plan $(\mathcal{P})$.

Preuve :

On a $\overrightarrow{AM}(x-x_A;y-y_A;z-z_A)$ et $\vec{u}(a;b;c)$

$$\overrightarrow{AM}.\vec{u}=k \iff a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=k$$

$$\iff ax+by+cz-(ax_A+by_A+cz_A+k)=0$$

L'ensemble des points dans l'espace tel que : $\vec{u}.\overrightarrow{AM}=k$ est un plan d'équation qui s'écrit sous la forme : $ax+by+cz+d=0$ avec $d=-(ax_A+by_A+cz_A+k)$

Application 5 :

Soit $\vec{u}(-4;5;1)$ un vecteur et $A(1;2;-3)$ un point de l'espace.

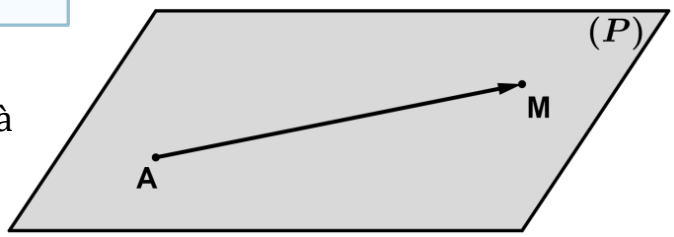
Déterminer l'ensemble $(\mathcal{P})$ des points $M(x;y;z)$ dans l'espace tel que : $\vec{u}.\overrightarrow{AM}=-2$

7. Équation cartésienne d'un plan définit par un point et un vecteur normal

Définition 7 :

Un vecteur non nul $\vec{n}$ est dit **normal** au plan $(\mathcal{P})$ si, pour tous points A et M de $(\mathcal{P})$, on a : $\vec{n}.\overrightarrow{AM}=0$





Remarque :

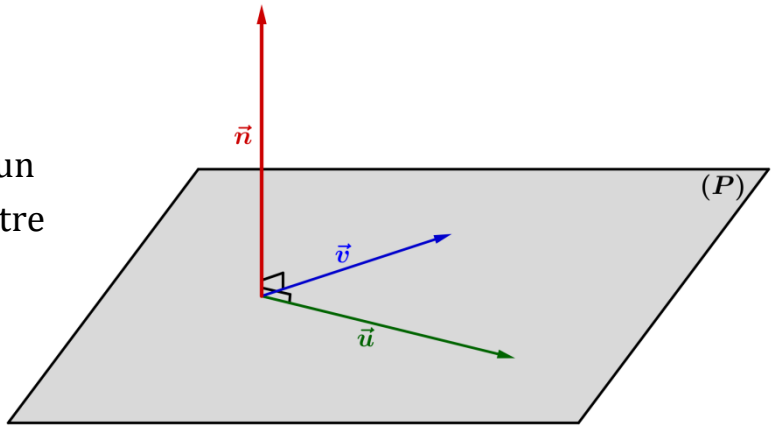
Il existe une infinité de vecteurs normaux à un plan : ce sont tous les vecteurs colinéaires au vecteur $\vec{n}$.

Propriété 3 :

Un vecteur est normal à un plan, si et seulement si, il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de ce plan.

Remarque :

Cette propriété va nous permettre d'une part de vérifier facilement qu'un vecteur est normal à un plan et, d'autre part, de déterminer les coordonnées d'un vecteur normal à un plan.



Exemple :

Déterminer les coordonnées d'un vecteur normal à un plan dirigé par $\vec{u}(2;-1;3)$ et $\vec{v}(4;0;2)$

Solution :

Ces deux vecteurs ne sont clairement pas colinéaires : une coordonnée est nulle pour l'un mais pas pour l'autre.

On note $\vec{n}(x; y; z)$.

Puisque $\vec{n}$ est normal au plan dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$, alors : $\vec{n}.\vec{u} = 0$ et $\vec{n}.\vec{v} = 0$.

On obtient ainsi les deux équations : $2x - y + 3z = 0$ et $4x + 2z = 0$

À l'aide de la deuxième équation, on obtient : $z = -2x$

On remplace dans la première :

$$2x - y + 3z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x - y - 6x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -4x - y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = -4x$$

On choisit, par exemple $x = 1$ et on trouve : $y = -4$ et $z = -2$

Ainsi : un vecteur normal au plan dirigé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est $\vec{n}(1; -4; -2)$

On vérifie : $\vec{n}.\vec{u} = 1 \times 2 + (-4) \times (-1) + (-2) \times 3 = 2 + 4 - 6 = 0$

et $\vec{n}.\vec{v} = 1 \times 4 + (-4) \times 0 + (-2) \times 2 = 4 + 0 - 4 = 0$.

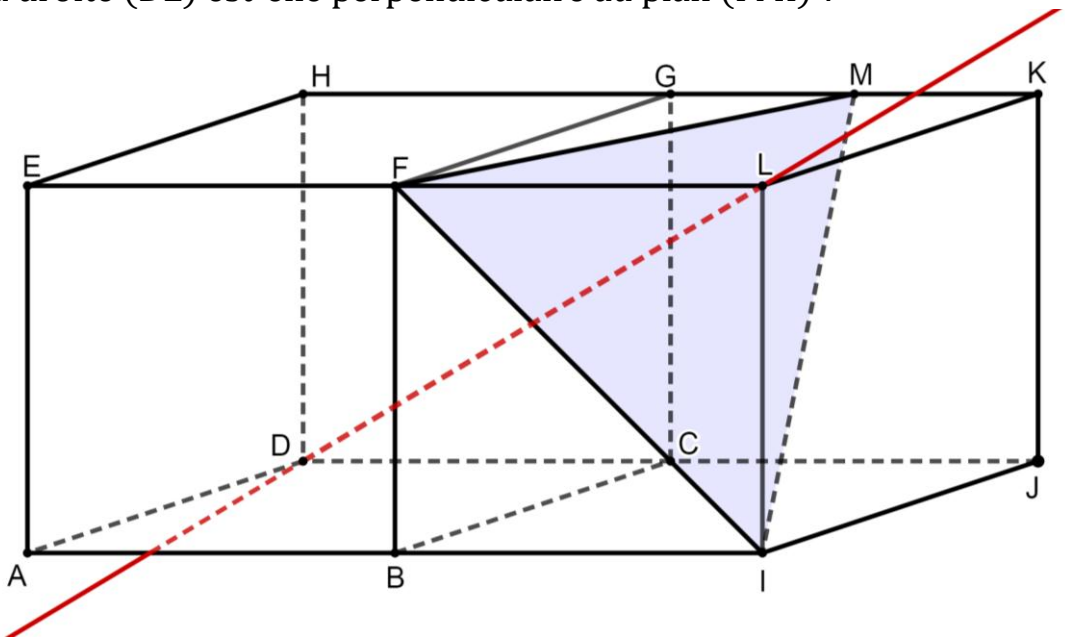
Application 6 :

Deux cubes d'arête 1, sont disposés comme indiqué sur la figure.

M est le milieu du segment [GK].

L'espace étant rapporté au repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$

1. Montrer que : $\overrightarrow{DL}(2; -1; 1), \overrightarrow{FM}\left(\frac{1}{2}; 1; 0\right)$ et $\overrightarrow{FI}(1; 0; -1)$.
2. La droite (DL) est-elle perpendiculaire au plan (FMI) ?



Propriété 4 :

Soient a et b et c des réels quelconques non tous nuls.

L'ensemble $(\mathcal{P})$ des points $M(x;y;z)$ tel que : $ax+by+cz+d=0$ est un plan dont un vecteur normal est $\vec{n}(a;b;c)$.

Exemple :

On considère le plan $(\mathcal{P})$ d'équation : $4x-2y+3z-1=0$.

- Un vecteur normal à ce plan est : $\vec{n}(4;-2;3)$.
- Le point $A(0;7;5)$ appartient au plan car :

$$4\times 0-2\times 7+3\times 5-1=0-14+15-1=0$$

Application 7 :

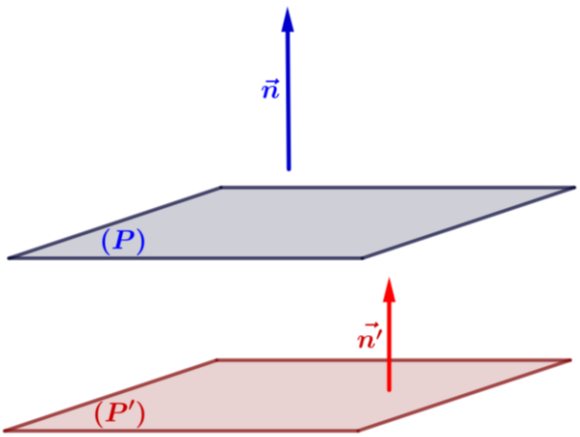
Déterminer une équation du plan $(\mathcal{P})$ passant par $A(3;-2;1)$ et dont un vecteur normal est $\vec{n}(4;-1;7)$.

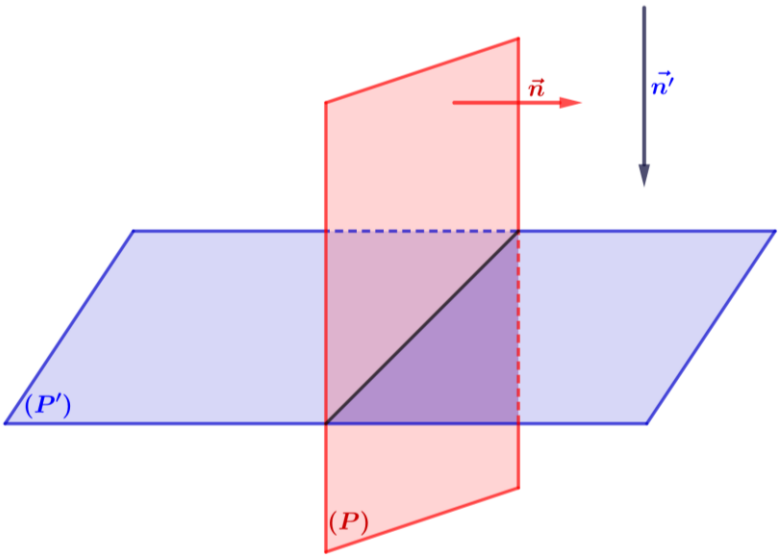
8. Positions relatives de deux plans

Propriété 5 :

Soient : $(\mathcal{P}): ax+by+cz+d=0$ et $(\mathcal{P}'): a'x+b'y+c'z+d'=0$ deux plans dans l'espace, et $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ deux vecteurs normaux respectivement à $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$

- Les plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont parallèles ssi $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont colinéaires
- Les plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont sécants ssi $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont non colinéaires
- Les plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont perpendiculaires ssi $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont orthogonaux





Application 8 :

On considère les plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ d'équations :

$$(\mathcal{P}): 2x - 4y + z + 1 = 0 \text{ et } (\mathcal{P}'): x + y + 2z - 3 = 0$$

1. Montrer que : $(\mathcal{P}) \perp (\mathcal{P}')$

2. Déterminer l'équation cartésienne du plan (Q) parallèle au plan $(\mathcal{P})$ passant par le point $A(1; -1; 1)$

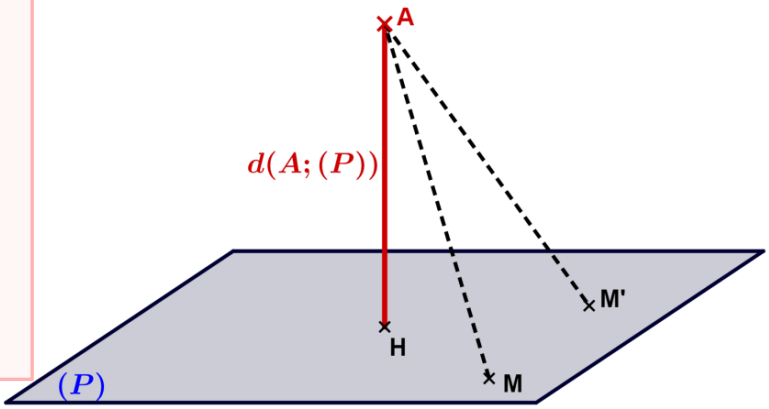
9. Distance d'un point à un plan

Propriété 6 :

Soient : $A(x_A; y_A; z_A)$ un point et $(\mathcal{P}): ax + by + cz + d = 0$ un plan dans l'espace et H est le projeté orthogonal de A sur le plan $(\mathcal{P})$.

La distance du point A au plan $(\mathcal{P})$ est la distance AH, et on a :

$$\boldsymbol{d(A; (\mathcal{P})) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$$



Remarque :

Pour tout point M du plan $(\mathcal{P})$, on a : $d(A; (\mathcal{P})) \leq AM$.

Application 9 :

On considère le plan $(\mathcal{P})$ d'équation : $4x + 2y + \sqrt{5}z - 14 = 0$
et les points $A(-1; 2; \sqrt{5})$ et $B(3; 1; 0)$.

Calculer les distances : $d(A; (\mathcal{P}))$ et $d(B; (\mathcal{P}))$.

Application 10 :

On considère le plan $(\mathcal{P})$ d'équation : $x + 2y - z - 1 = 0$

1) Les points $A(1;1;2)$ et $B(2;1;1)$ appartiennent-ils au plan $(\mathcal{P})$?

2) Calculer la distance AB puis les distances de ces deux points A et B au plan $(\mathcal{P})$.

3) Le point A est-il le projeté orthogonal de B sur le plan $(\mathcal{P})$?

II. Étude analytique de la sphère

Dans tout ce qui va suivre, l'espace $(\mathcal{E})$ est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

1. Définition d'une sphère

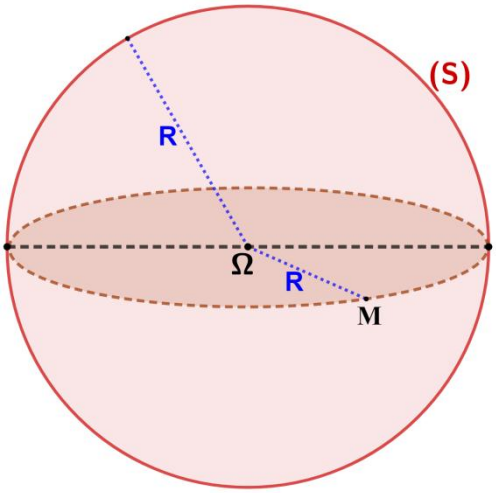
Définition :

Soit Ω un point dans l'espace $(\mathcal{E})$, et R un réel positif.

La **sphère** de centre Ω et de rayon R est l'ensemble des points M dans $(\mathcal{E})$, tel que : $\Omega M = R$.

On la note par : $S(\Omega, R)$.

Ainsi : $S(\Omega, R) = \{ M \in (\mathcal{E}) / \Omega M = R \}$.



2. Équation cartésienne d'une sphère

Soit $\Omega(a,b,c)$ un point dans l'espace et R un réel positif.

On a : $M(x,y,z) \in S(\Omega, R) \iff \Omega M = R$

$$\iff \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2} = R$$

Propriété 1 :

Soit $\Omega(a,b,c)$ un point dans l'espace $(\mathcal{E})$ et R un réel positif.

La sphère $S(\Omega, R)$ à une **équation cartésienne** de la forme :

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = R^2$$

Application 1 :

1) Déterminer une équation cartésienne de la sphère de centre $\Omega(3,-2,1)$ et de rayon $R = 5$.

2) Déterminer une équation cartésienne de la sphère de centre $\Omega(0,3,1)$ et qui passe par le point $A(-2,-1,1)$.

3. La sphère définie par son diamètre

Propriété 2 :

Soit $A(x_A;y_A;z_A)$ et $B(x_B;y_B;z_B)$ deux points de l'espace $(\mathcal{E})$.

L'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace tel que : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$ est la **sphère de diamètre [AB]** et d'équation cartésienne :

$$(x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)+(z-z_A)(z-z_B) = 0$$

Application 2 :

Déterminer une équation cartésienne de la sphère (S) de diamètre [AB] avec : $A(2;0;-3)$ et $B(7;-5;3)$.

4. L'ensemble des points $M(x,y,z)$ tel que :

$$x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$$

Propriété 3 :

Soit (E) l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace tel que :

$$x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0 \text{ avec : } a,b,c \text{ et } d \text{ des réels}$$

- Si : $a^2+b^2+c^2-4d>0$, alors :

(E) est une sphère de centre $\Omega\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2},-\frac{c}{2}\right)$ et de rayon $R=\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2-4d}}{2}$

- Si : $a^2+b^2+c^2-4d=0$, alors : $(E)=\left\{\Omega\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2},-\frac{c}{2}\right)\right\}$

- Si : $a^2+b^2+c^2-4d<0$, alors : $(E)=\emptyset$

Application 3 :

Déterminer (E) l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace $(\mathcal{E})$ dans les cas suivants :

a. $x^2+y^2+z^2+2x+2y-6z+7=0$

b. $x^2+y^2+z^2-4x+8z+20=0$

c. $x^2+y^2+z^2-y+1=0$

5. Représentation paramétrique d'une sphère

Propriété 4 :

Soit $S(\Omega,R)$ la sphère de centre $\Omega(a,b,c)$ et de rayon R.

Le point $M(x,y,z)$ appartient à la sphère (S), si et seulement si :

$$\begin{cases} x=a+R\sin\varphi.\cos\theta \\ y=b+R\sin\varphi.\sin\theta \\ z=c+R\cos\varphi \end{cases}$$

Ce système s'appelle une **représentation paramétrique** de la sphère (S).

Application 4 :

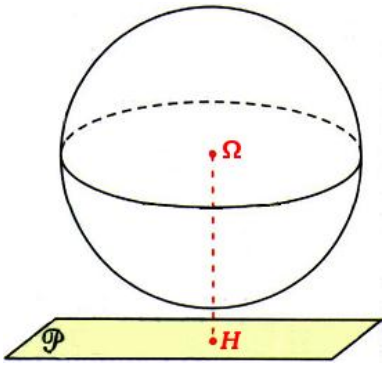
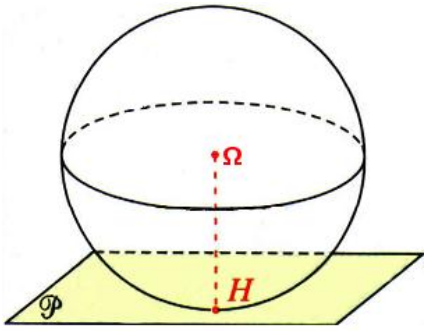
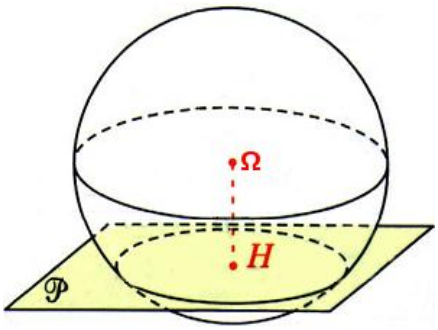
Déterminer une représentation paramétrique de la sphère (S) de centre $\Omega(1,-2,0)$ et de rayon $R=3$.

6. Positions relatives d'une sphère et d'un plan

Propriété 5 :

Soit (S) une sphère de centre Ω et de rayon R et $(\mathcal{P})$ un plan de l'espace.
Nommons H le projeté orthogonal de Ω sur le plan $(\mathcal{P})$,
et $d = \Omega H$, la distance du point Ω au plan $(\mathcal{P})$.

- Si $\boldsymbol{d} > R$, alors le plan $(\mathcal{P})$ et la sphère (S) n'ont pas de points en commun.
  On dit que le plan $(\mathcal{P})$ et la sphère (S) sont **disjoints**.
- Si $\boldsymbol{d} = R$, alors le plan $(\mathcal{P})$ et la sphère (S) ont un unique point en commun.
  On dit que le plan $(\mathcal{P})$ est **tangent** à la sphère (S) en H.
- Si $\boldsymbol{d} < R$, alors l'ensemble des points communs au plan $(\mathcal{P})$ et la sphère (S) est le cercle du plan $(\mathcal{P})$ de centre H et de rayon $r = \sqrt{R^2 - d^2}$.
  On dit que le plan $(\mathcal{P})$ **coupe** la sphère (S) suivant le cercle $\mathcal{C}\left(H; \sqrt{R^2 - d^2}\right)$.

$\boldsymbol{d(\Omega; (\mathcal{P})) > R}$	$\boldsymbol{d(\Omega; (\mathcal{P})) = R}$	$\boldsymbol{d(\Omega; (\mathcal{P})) < R}$
		
$(\mathcal{P})$ et (S) sont disjoints	$(\mathcal{P})$ est tangent à (S)	$(\mathcal{P})$ coupe (S) suivant un cercle $(\mathcal{C})$

Remarques :

- On détermine H par l'intersection du plan $(\mathcal{P})$ et la droite (D) perpendiculaire au plan $(\mathcal{P})$ passant par Ω.
- Tout vecteur normal au plan $(\mathcal{P})$ est un vecteur directeur de la droite (D).

Application 5 :

Soit (S) la sphère d'équation : $(x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 2$, et $(\mathcal{P})$ le plan d'équation : $x + y - 3 = 0$.

1) Montrer que le plan $(\mathcal{P})$ est tangent à la sphère (S).
2) Déterminer les coordonnées du point de tangence H.

Application 6 :

Soit (S) la sphère de centre $\Omega(1,0,0)$ et de rayon $R = 2$,
et $(\mathcal{P})$ le plan d'équation : $x - z + 1 = 0$.

1) Déterminer une équation cartésienne de (S).

2) Calculer $d(\Omega; (\mathcal{P}))$ et vérifier que le plan $(\mathcal{P})$ coupe (S) suivant un cercle $(\mathcal{C})$ dont on déterminera le rayon r.

3) Déterminer une équation paramétrique de la droite qui passe par Ω et qui est perpendiculaire au plan $(\mathcal{P})$.

4) En déduire les coordonnées de H le centre du cercle $(\mathcal{C})$.

Application 7 :

On considère les plans d'équations respectives

$$(\mathcal{P}) : x - y + z = 0 \text{ et } (\mathcal{Q}) : 2x + 3y + z - 6 = 0$$

et la sphère (S) de centre $\Omega(1; 2; 4)$ et tangente au plan $(\mathcal{P})$
et soit la droite (Δ) qui passe par Ω et perpendiculaire au plan $(\mathcal{Q})$.

1) Montrer que les plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{Q})$ sont orthogonaux.

2) Déterminer une équation cartésienne de la sphère (S).

3) Déterminer le point de tangence de $(\mathcal{P})$ et (S).

4) Déterminer le point d'intersection de (Δ) et $(\mathcal{Q})$.

5) Montrer que le plan $(\mathcal{Q})$ coupe la sphère (S) suivant un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

7. Le plan tangent à une sphère en un point

Propriété 6 :

Soient (S) une sphère de centre Ω et $A \in (S)$.

Il existe un plan $(\mathcal{P})$ unique de l'espace, tangent à la sphère (S) en A.

Ce plan est définit par : $M \in (\mathcal{P}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{A\Omega} = 0$

Application 8 :

Soit (S) la sphère d'équation : $x^2 + y^2 + (z+2)^2 = 3$, et soit le point $A(1,-1,-1)$.

1) Vérifier que : $A \in (S)$.

2) Déterminer une équation cartésienne du plan $(\mathcal{P})$ tangent à la sphère (S) en A.

III. Le produit vectoriel des deux vecteurs

1. Orientation de l'espace

L'espace $(\mathcal{E})$ est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$.

Le bonhomme d'Ampère est un observateur imaginaire porté sur l'axe $[Oz)$, ses pieds sont à l'origine O et regarde l'axe $[Ox)$.

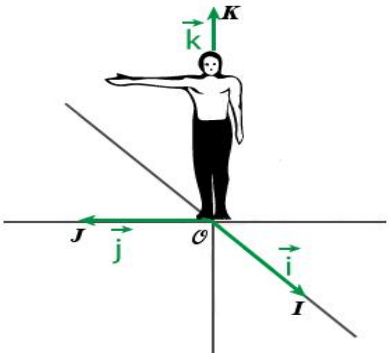
On aura deux positions pour l'axe $[Oy)$:

1er cas : $[Oy)$ est à la droite de l'observateur.

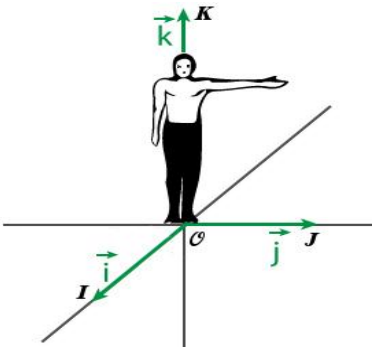
On dit que la base $(\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$ est indirecte de même pour le repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$.

2éme cas : $[Oy)$ est à la gauche de l'observateur.

On dit que la base $(\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$ est directe de même pour le repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$.



La base $(\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$ est indirecte



La base $(\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$ est directe

Dans tout ce qui va suivre : $(\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$ est une base orthonormée directe.

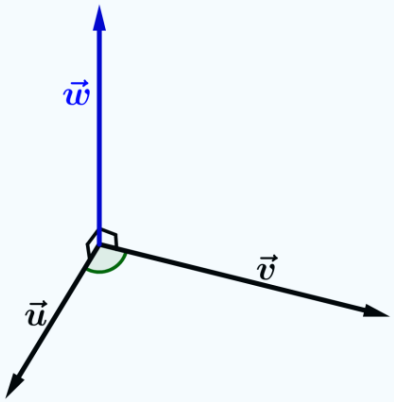
2. Définition du produit vectoriel

Définition 1 :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.

Le produit vectoriel des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, dans cet ordre, noté $\vec{u}\wedge\vec{v}$, est le vecteur $\vec{w}$ définit par :

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors : $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}$.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires, alors le vecteur $\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{v}$ est tel que :
  - $\vec{w}\perp\vec{u}$ et $\vec{w}\perp\vec{v}$
  - la base $(\vec{u};\vec{v};\vec{w})$ est directe
  - $\|\vec{w}\|=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\sin(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$



Remarque :

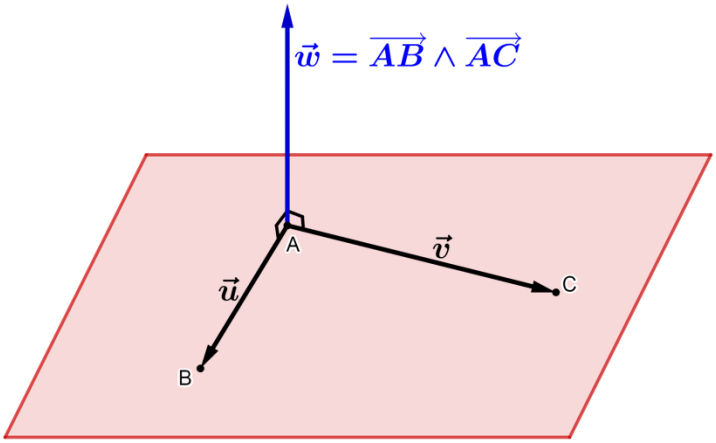
Soit A un point dans l'espace.

On suppose que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires.

Ils existent deux points B et C dans l'espace tels que : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

Les points A, B et C étant non alignés, ils définissent un plan (ABC) dans l'espace.

Le vecteur $\vec{w} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal au plan (ABC).



3. Propriétés du produit vectoriel

Propriété 1 :

Soit $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace et k un nombre réel.

- $\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0}$
- $\vec{v} \wedge \vec{u} = -(\vec{u} \wedge \vec{v})$ (Le produit vectoriel est antisymétrique)
- $\begin{cases} \bullet\ \vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) + (\vec{u} \wedge \vec{w}) \\ \bullet\ (\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = (\vec{u} \wedge \vec{w}) + (\vec{v} \wedge \vec{w}) \\ \bullet\ (k\vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge (k\vec{v}) = k(\vec{u} \wedge \vec{v}) \end{cases}$ (Le produit vectoriel est bilinéaire)

4. L'expression analytique du produit vectoriel

Propriété 2 :

Soit $\vec{u}(x; y; z)$ et $\vec{v}(x'; y'; z')$ deux vecteurs de l'espace vectoriel.

On a : $\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \vec{k}$

Application 1 :

Soit $\vec{u}(1; 2; 3)$ et $\vec{v}(0; 5; -1)$ deux vecteurs.

Déterminer les coordonnées du vecteur : $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

5. Applications du produit vectoriel

5.1. Alignement de trois points

Propriété 3 :

Soient A, B et C trois points dans l'espace.

A, B et C sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires ce qui est équivalent à $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{0}$.

5.2. Surface d'un parallélogramme - Surface d'un triangle

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires de l'espace vectoriel.

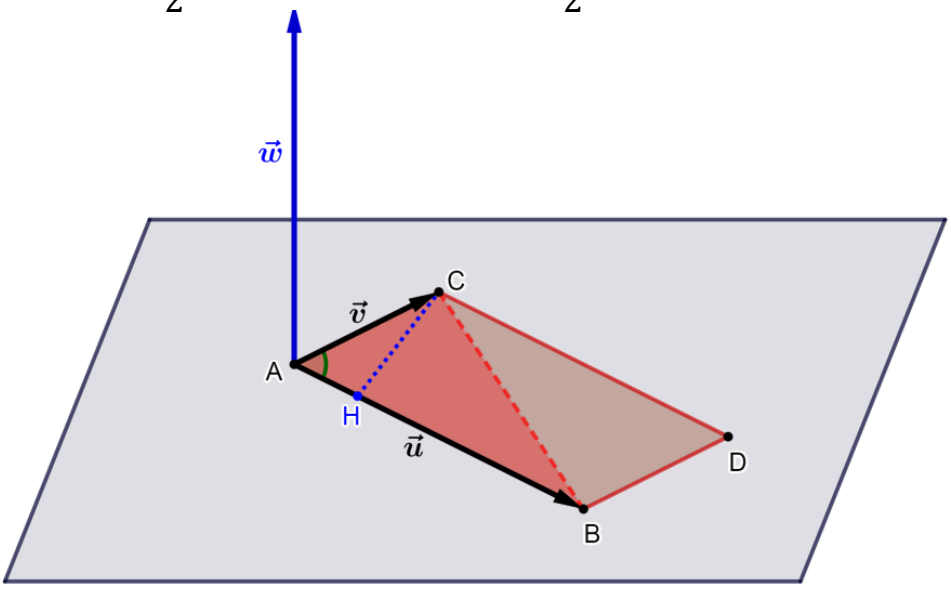
On suppose que : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

On a d'après la définition du produit vectoriel : $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = AB \times AC \times \sin(\widehat{BAC})$

D'autre part, la surface du triangle ABC est : $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \times CH$

et on a : $\sin(\widehat{BAC}) = \frac{CH}{AC}$, donc : $CH = AC \times \sin(\widehat{BAC})$

et par suite : $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin(\widehat{BAC}) = \frac{1}{2} \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$



Propriété 4 :

Soient A, B et C trois points non alignés dans l'espace.

- La surface du triangle ABC est : $\frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$
- La surface du parallélogramme ABDC est : $\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$

5.3. Équation d'un plan

Soient A, B et C trois points non alignés dans l'espace.

Puisque le vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est normal au plan (ABC), alors :

$$M(x,y,z) \in (ABC) \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AM}.\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right) = 0$$

Cette équivalence détermine une équation cartésienne du plan (ABC).

Application 2 :

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct, on considère les points :

$$A(1;0;2)\ ;\ B(-1;1;1) \text{ et } C(3;2;0)$$

1) Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ et vérifier que les points A et B et C sont non alignés.

2) Calculer la surface du triangle ABC.

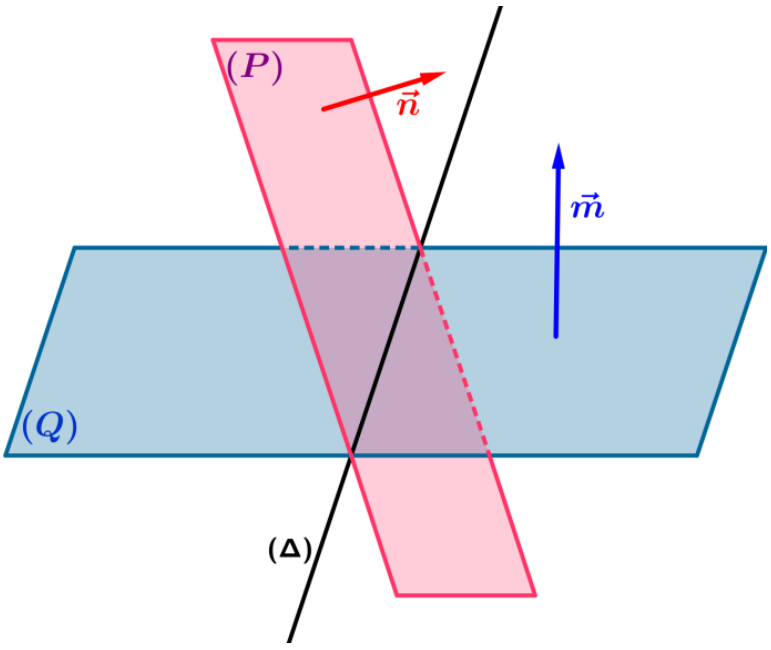
3) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

5.4. Intersection de deux plans

Propriété 5 :

Soient $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{Q})$ deux plans dans l'espace, et $\vec{n}$ est un vecteur normal de $(\mathcal{P})$ et $\vec{m}$ est un vecteur normal de $(\mathcal{Q})$.

Si $\vec{n}$ et $\vec{m}$ sont non colinéaires alors $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{Q})$ se coupent selon une droite (Δ) dirigée par $\vec{n} \wedge \vec{m}$.



Application 3 :

Quelle est l'intersection des plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{Q})$ d'équations respectives :

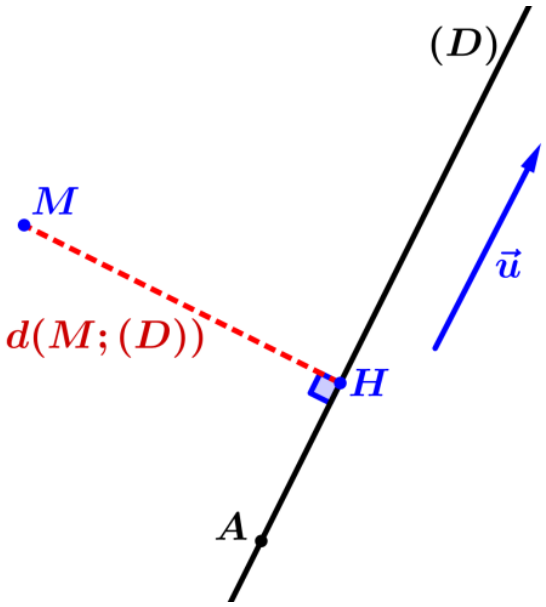
$$(\mathcal{P}) : x + 2y - 2z + 3 = 0 \text{ et } (\mathcal{Q}) : 4x - 4y + 2z - 5 = 0$$

5.5. Distance d'un point par rapport à une droite

Propriété 6 :

Soit $D(A;\vec{u})$ la droite qui passe par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ et M un point dans l'espace.

La distance du point M à la droite (D) est : $\boldsymbol{d(M;(D))} = \dfrac{\|\vec{u} \wedge \overrightarrow{AM}\|}{\|\vec{u}\|}$



Application 4 :

Calculer la distance du point M(2; 1; 0) à la droite (D) dont une représentation paramétrique est :

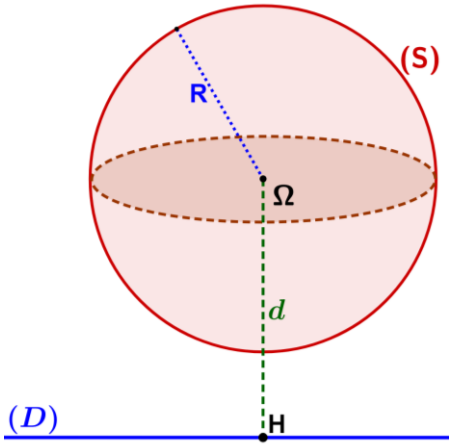
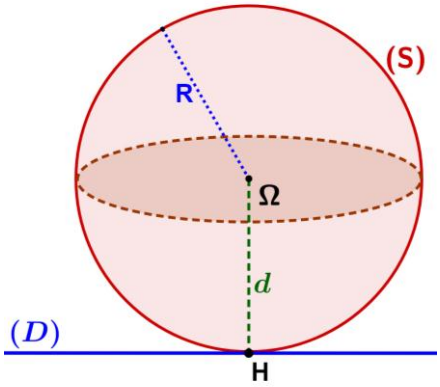
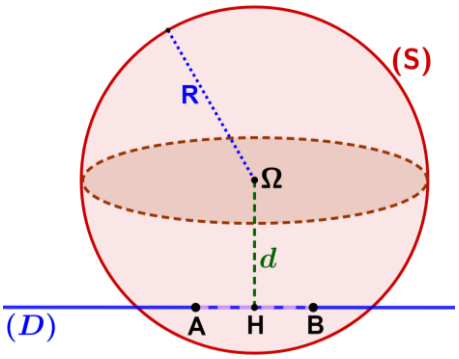
$$(D): \begin{cases} x = -1 + 2k \\ y = 2 - 2k \\ z = -1 + k \end{cases} \quad / \ k \in \mathbb{R}$$

5.6. Positions relatives d'une sphère et d'une droite

Propriété 7 :

Soit $(\mathcal{S})$ la sphère de centre Ω et de rayon R, et (D) une droite de l'espace.
Nommons H le projeté orthogonal du point Ω sur la droite (D).
et $d = \Omega H$, la distance du point Ω à la droite (D) .

- Si $\boldsymbol{d} >$ R, alors la droite (D) et la sphère $(\mathcal{S})$ n'ont pas de points en commun.
  On dit que la droite (D) et la sphère (S) sont **disjoints**.
- Si $\boldsymbol{d} =$ R, alors la droite (D) et la sphère $(\mathcal{S})$ ont un unique point en commun.
  On dit que la droite (D) est **tangente** à $(\mathcal{S})$ en H.
- Si $\boldsymbol{d} <$ R, alors la droite (D) et la sphère $(\mathcal{S})$ ont deux points en commun A et B symétriques par rapport au point H.
  On dit que la droite (D) **perce** la sphère (S) aux points A et B.

➢ $d(\Omega;(D)) > R$	➢ $d(\Omega;(D)) = R$	➢ $d(\Omega;(D)) < R$
		
(D) et $(\mathcal{S})$ sont disjoints	(D) est tangente à $(\mathcal{S})$	(D) perce $(\mathcal{S})$ en deux points

Application 5 :

Soit $(\mathcal{S})$ la sphère d'équation : $x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 4y - 2z + 5 = 0$, et (D) la droite dont une représentation paramétrique est $(D): \begin{cases} x = 2t \\ y = 5 + t \\ z = 1 - 2t \end{cases} / \ t \in \mathbb{R}$

Étudier la position relative de la sphère $(\mathcal{S})$ et la droite (D).

Application 6 :

Étudier la position relative de la sphère $(\mathcal{S})$: $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 1 = 0$ et la droite (D) qui passe par $A(-1;2;-1)$ et dont $\vec{u}(2;-2;1)$ est un vecteur directeur.