**Prof. Taher Bouyguir**

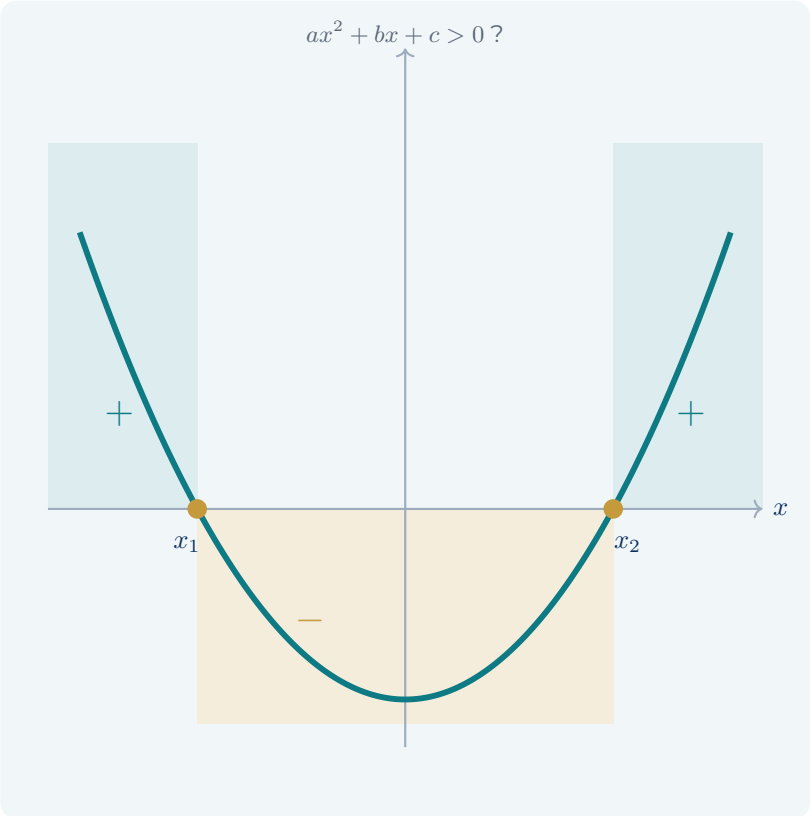
Professeur de mathématiques
Secondaire qualifiant

Prof Taher
Prof Taher Bouyguir
Taher Bouyguir
Contact WhatsApp
Telegram
mr.bouyguir@gmail.com
www.proftaher.com

**1ère Spé Maths**

CHAPITRE 5

# Inéquations du second degré




**Cours et corrigés des applications**

5
Cours

# Inéquations du second degré

## Capacités attendues

- Factoriser une fonction polynôme de degré 2 en diversifiant les stratégies.
- Déterminer le signe d'une fonction polynôme du second degré.
- Résoudre une inéquation du second degré.
- Dresser le tableau de signes d'une expression plus complexe (produit, quotient).
- Résoudre un problème se ramenant à une inéquation du second degré.

**Prérequis (Chap 1) :** pour $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, le discriminant est $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta > 0$ : deux racines $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ ;
- si $\Delta = 0$ : une racine double $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ ;
- si $\Delta < 0$ : aucune racine réelle.

Lorsque $\Delta > 0$ : $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ et $x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}$. Signe d'une fonction affine $mx + p$.

## Table des matières


I Factoriser un polynôme du second degré . . . 3
1 Forme factorisée . . . 3
2 Diversifier les stratégies . . . 3
II Signe d'un polynôme du second degré . . . 4
1 Le théorème du signe . . . 4
2 Interprétation graphique . . . 5
III Résoudre une inéquation du second degré . . . 6
IV Tableau de signes d'une expression plus complexe . . . 8
1 Signe d'un produit . . . 8
2 Signe d'un quotient – Inéquations quotients . . . 9
V Problèmes se ramenant à une inéquation du second degré . . . 10
Corrigés des applications . . . 13

# I Factoriser un polynôme du second degré

## 1 Forme factorisée

**Propriété 1 : forme factorisée**

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta > 0$ : $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, où $x_1$ et $x_2$ sont les deux racines.
- Si $\Delta = 0$ : $P(x) = a(x - x_0)^2$, où $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$ : $P(x)$ **ne se factorise pas** en produit de facteurs du premier degré.

## 2 Diversifier les stratégies

Le discriminant marche toujours, mais il est souvent plus rapide de reconnaître une forme particulière.

**Méthode : choisir sa stratégie de factorisation**

1. **Facteur commun** (quand $c = 0$) : $2x^2 - 6x = 2x(x - 3)$.
2. **Identité remarquable** : $4x^2 - 9 = (2x - 3)(2x + 3)$ ; $x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2$.
3. **Racine évidente** : on teste $1$, $-1$, $2$, $-2$… Si $x_1$ est racine, la seconde s'obtient avec le produit $x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}$ (ou la somme $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$).
4. **Discriminant** : dans tous les autres cas, on calcule $\Delta$ et les racines.

**Exemple : racine évidente**

Factoriser $P(x) = x^2 - 5x + 4$.

$P(1) = 1 - 5 + 4 = 0$, donc $1$ est une racine. Le produit des racines vaut $\dfrac{c}{a} = 4$, donc l'autre racine est $4$.

Ainsi $P(x) = (x - 1)(x - 4)$.

**Exemple : discriminant**

Factoriser $Q(x) = 3x^2 + 5x - 2$.

$\Delta = 5^2 - 4 \times 3 \times (-2) = 25 + 24 = 49 > 0$, $\sqrt{\Delta} = 7$ : $x_1 = \dfrac{-5 - 7}{6} = -2$ et $x_2 = \dfrac{-5 + 7}{6} = \dfrac{1}{3}$.

Ainsi $Q(x) = 3(x + 2)\left(x - \dfrac{1}{3}\right) = (x + 2)(3x - 1)$.

**Application 1**

Factoriser, lorsque c'est possible, en choisissant la méthode la plus rapide :

1. $A(x) = 3x^2 + 12x$ ;
2. $B(x) = 9x^2 - 16$ ;
3. $C(x) = x^2 + 6x + 9$ ;
4. $D(x) = 2x^2 - x - 1$ ;
5. $E(x) = x^2 - 7x + 10$ ;
6. $F(x) = -x^2 + 4x - 5$.

Ma réponse :

## II Signe d'un polynôme du second degré

### 1 Le théorème du signe

**Théorème : signe du trinôme $ax^2 + bx + c$**

Si $\Delta > 0$ : $P(x)$ est du signe de $a$ **à l'extérieur** des racines et du signe de $-a$ **entre** les racines $(x_1 < x_2)$.

| $x$ | $-\infty$ | | $x_1$ | | $x_2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(x)$ | signe de $a$ | | $0$ | signe de $-a$ | $0$ | signe de $a$ | |

Si $\Delta = 0$ : $P(x)$ est du signe de $a$ et s'annule seulement en $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$.

| $x$ | $-\infty$ | | $x_0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(x)$ | signe de $a$ | | $0$ | signe de $a$ | |

Si $\Delta < 0$ : $P(x)$ est **toujours** du signe de $a$ (il ne s'annule jamais).

| $x$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $P(x)$ | signe de $a$ | |

**Démonstration**

**Cas** $\Delta > 0$. $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ avec $x_1 < x_2$. On étudie le signe du produit $(x - x_1)(x - x_2)$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $x_1$ | | $x_2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x - x_1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $x - x_2$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $(x - x_1)(x - x_2)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

En multipliant par $a$, on obtient le signe de $a$ à l'extérieur des racines et celui de $-a$ entre elles.

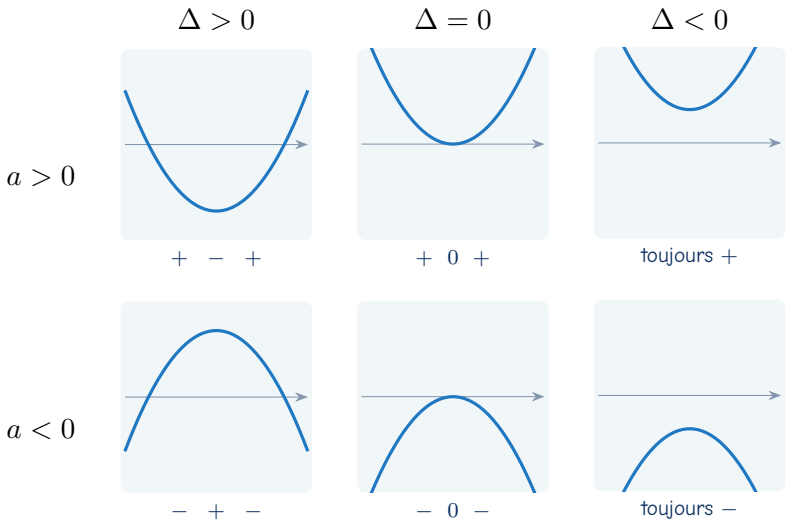
**Cas** $\Delta \leqslant 0$. D'après la forme canonique (Chap 1) : $P(x) = a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right]$.

Si $\Delta < 0$, alors $-\dfrac{\Delta}{4a^2} > 0$, donc le crochet est strictement positif : $P(x)$ a le signe de $a$.

Si $\Delta = 0$, le crochet vaut $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 \geqslant 0$ : $P(x)$ a le signe de $a$ et s'annule en $-\dfrac{b}{2a}$. □

## 2 Interprétation graphique

La courbe de $P$ est une parabole tournée vers le haut si $a > 0$, vers le bas si $a < 0$. $P(x) > 0$ lorsque la parabole est **au-dessus** de l'axe des abscisses, $P(x) < 0$ lorsqu'elle est **en dessous**. Les racines sont les abscisses des points d'intersection avec l'axe des abscisses.




**Exemple**

- $P(x) = 2x^2 - x - 1$ : $\Delta = 1 + 8 = 9$, racines $x_1 = \dfrac{1-3}{4} = -\dfrac{1}{2}$ et $x_2 = \dfrac{1+3}{4} = 1$ ; $a = 2 > 0$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

- $Q(x) = -x^2 + 4x - 5$ : $\Delta = 16 - 20 = -4 < 0$ et $a = -1 < 0$, donc $Q(x) < 0$ pour tout réel $x$.

**Application 2**

Étudier le signe de chacun des polynômes suivants (dresser un tableau de signes) :

1. $P(x) = x^2 - x - 6$ ;
2. $Q(x) = -2x^2 + 8x - 8$ ;
3. $R(x) = 3x^2 + x + 1$.

Ma réponse :

## III Résoudre une inéquation du second degré

**Méthode : résoudre une inéquation du second degré**

1. Tout ramener dans un membre pour obtenir une inéquation du type $ax^2 + bx + c > 0$ (ou $< 0$, $\geqslant 0$, $\leqslant 0$).
2. Chercher les racines (factorisation rapide ou discriminant).
3. Dresser le tableau de signes du polynôme.
4. Lire l'ensemble des solutions $S$ : crochets **fermés** pour $\geqslant$ et $\leqslant$ (on garde les racines), **ouverts** pour $>$ et $<$.

**Exemple**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ : $x^2 - x - 6 \leqslant 0$.
$\Delta = 1 + 24 = 25$ : racines $x_1 = \dfrac{1-5}{2} = -2$ et $x_2 = \dfrac{1+5}{2} = 3$ ; $a = 1 > 0$, donc le polynôme est négatif entre les racines :

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2-x-6$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

$S=[-2\,;3]$.

**Exemple**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ : $2x^2>3x+2$.
$2x^2>3x+2 \iff 2x^2-3x-2>0$. $\Delta=9+16=25$ : racines $\dfrac{3-5}{4}=-\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{3+5}{4}=2$ ; $a=2>0$.
Le polynôme est strictement positif à l'extérieur des racines : $S=\left]-\infty\,;-\dfrac{1}{2}\right[\cup]2\,;+\infty[$.

**Remarque**

Si $\Delta<0$, le polynôme garde un signe constant : l'ensemble des solutions est $\mathbb{R}$ ou $\varnothing$.
Par exemple, $x^2+x+1<0$ n'a aucune solution ($\Delta=-3<0$ et $a>0$) : $S=\varnothing$.

**Application 3**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $x^2-4x+3>0$ ;
2. $-x^2+2x+8\geqslant 0$ ;
3. $4x^2\leqslant 4x-1$ ;
4. $x(x+3)<2x+6$ ;
5. $2x^2-3x+5<0$.

Ma réponse :

## IV Tableau de signes d'une expression plus complexe

### 1 Signe d'un produit

**Méthode : signe d'un produit ou d'un quotient**

1. Étudier le signe de **chaque facteur** (fonction affine ou polynôme du second degré).
2. Placer toutes les valeurs qui annulent les facteurs dans la première ligne, **rangées dans l'ordre croissant**.
3. Une ligne par facteur, puis la dernière ligne avec la **règle des signes**.
4. Pour un quotient, les valeurs qui annulent le dénominateur sont **interdites** : on met une double barre.

**Exemple**

Étudier le signe de $A(x) = (3-x)(x^2+x-2)$.

- $3-x$ s'annule en $3$ ; positif avant, négatif après (coefficient $-1 < 0$).
- $x^2+x-2$ : racine évidente $1$ ; produit des racines $\frac{c}{a} = -2$, donc l'autre racine est $-2$ ; $a = 1 > 0$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $3-x$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $x^2+x-2$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $A(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

**Application 4**

Dresser le tableau de signes de $A(x) = (2x-4)(-x^2+x+6)$.

Ma réponse :

## 2 Signe d'un quotient – Inéquations quotients

**Exemple : signe d'un quotient**

Résoudre dans $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ : $\dfrac{x^2 - x - 2}{x + 3} \geqslant 0$.

- Numérateur : racine évidente $-1$, produit $\dfrac{c}{a} = -2$ donc autre racine $2$ ; $a = 1 > 0$.
- Dénominateur : $x + 3$ s'annule en $-3$ (valeur interdite).

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $-1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2 - x - 2$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $x + 3$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $\dfrac{x^2 - x - 2}{x + 3}$ | | $-$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

$S = ]-3\,;-1] \cup [2\,;+\infty[$ ($-3$ est exclu : valeur interdite).

**Remarque**

**Attention** : on ne multiplie jamais les deux membres d'une inéquation par une expression dont on ne connaît pas le signe. On ramène tout dans un seul membre, on réduit au même dénominateur, puis on fait un tableau de signes.

**Application 5**

Résoudre dans $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ l'inéquation : $\dfrac{3}{x - 1} \geqslant x + 1$.

Ma réponse :

## V Problèmes se ramenant à une inéquation du second degré

**Méthode : résoudre un problème**

1. Choisir l'inconnue $x$ et préciser les valeurs possibles (domaine).
2. Traduire l'énoncé par une inéquation.
3. Résoudre l'inéquation, puis garder seulement les solutions qui appartiennent au domaine.
4. Conclure par une phrase.

**Exemple : rectangle**

Un rectangle a un périmètre de $20$ cm. Pour quelles longueurs de côté son aire est-elle au moins égale à $21$ cm$^2$ ?

Soit $x$ la longueur d'un côté (en cm). L'autre côté mesure $10 - x$, avec $x \in ]0\,;10[$.

$$x(10-x) \geqslant 21 \iff -x^2+10x-21 \geqslant 0 \iff x^2-10x+21 \leqslant 0.$$

$\Delta = 100 - 84 = 16$ : racines $\dfrac{10-4}{2} = 3$ et $\dfrac{10+4}{2} = 7$ ; $a = 1 > 0$, donc le polynôme est négatif entre les racines.

$S = [3\,;7]$, contenu dans $]0\,;10[$. **L'aire est au moins égale à $21$ cm$^2$ lorsqu'un côté mesure entre $3$ et $7$ cm.**

**Application 6**

Une entreprise fabrique $q$ objets par jour, avec $q \in [0\,;50]$. Son bénéfice journalier, en euros, est

$$B(q) = -2q^2 + 80q - 600.$$

1. Pour quelles quantités l'entreprise ne perd-elle pas d'argent ($B(q) \geqslant 0$) ?
2. Pour quelles quantités le bénéfice dépasse-t-il strictement $150$ euros ?

Ma réponse :

## Application 7

On lance une balle verticalement. Sa hauteur (en mètres) après $t$ secondes est $h(t) = -5t^2 + 20t$, avec $t \in [0\,;4]$.

1. Pendant combien de temps la balle est-elle à plus de $15$ m de hauteur ?
2. Résoudre $h(t) \geqslant 20$. Que peut-on en déduire ?

Ma réponse :

## Application 8

**(Synthèse)** Soit $m$ un réel et $P(x) = x^2 + mx + 1$.
Déterminer les valeurs de $m$ pour lesquelles $P(x) > 0$ pour tout réel $x$.

Ma réponse :

## Corrigés des applications

### Corrigé de l'application 1

1. Facteur commun : $A(x) = 3x(x+4)$.
2. Identité $a^2 - b^2$ : $B(x) = (3x)^2 - 4^2 = (3x-4)(3x+4)$.
3. Identité $(a+b)^2$ : $C(x) = (x+3)^2$.
4. Racine évidente : $D(1) = 2 - 1 - 1 = 0$. Produit des racines : $\dfrac{c}{a} = -\dfrac{1}{2}$, donc l'autre racine est $-\dfrac{1}{2}$.
   $D(x) = 2(x-1)\left(x + \dfrac{1}{2}\right) = (x-1)(2x+1)$.
5. $\Delta = 49 - 40 = 9$, racines $\dfrac{7-3}{2} = 2$ et $\dfrac{7+3}{2} = 5$ : $E(x) = (x-2)(x-5)$.
6. $\Delta = 16 - 20 = -4 < 0$ : $F(x)$ ne se factorise pas.

### Corrigé de l'application 2

1. $\Delta = 1 + 24 = 25$, racines $\dfrac{1-5}{2} = -2$ et $\dfrac{1+5}{2} = 3$ ; $a = 1 > 0$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

2. $Q(x) = -2(x^2 - 4x + 4) = -2(x-2)^2$ ($\Delta = 64 - 64 = 0$) ; $a = -2 < 0$.

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $Q(x)$ | | $-$ | $0$ | $-$ | |

3. $\Delta = 1 - 12 = -11 < 0$ et $a = 3 > 0$ : $R(x) > 0$ pour tout réel $x$.

### Corrigé de l'application 3

1. $\Delta = 16 - 12 = 4$, racines $1$ et $3$ ; $a > 0$ : positif à l'extérieur. $S = ]-\infty\,;1[ \cup ]3\,;+\infty[$.
2. $\Delta = 4 + 32 = 36$, racines $\dfrac{-2-6}{-2} = 4$ et $\dfrac{-2+6}{-2} = -2$ ; $a = -1 < 0$ : positif entre les racines. $S = [-2\,;4]$.
3. $4x^2 \leqslant 4x - 1 \iff 4x^2 - 4x + 1 \leqslant 0 \iff (2x-1)^2 \leqslant 0$. Un carré n'est jamais strictement négatif, donc il faut $2x - 1 = 0$ : $S = \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$.
4. $x(x+3) < 2x + 6 \iff x^2 + 3x - 2x - 6 < 0 \iff x^2 + x - 6 < 0$. $\Delta = 25$, racines $-3$ et $2$ ; $a > 0$. $S = ]-3\,;2[$.
5. $\Delta = 9 - 40 = -31 < 0$ et $a = 2 > 0$ : le polynôme est toujours strictement positif. $S = \varnothing$.

## Corrigé de l'application 4

- $2x-4$ s'annule en $2$ ; négatif avant, positif après.
- $-x^2+x+6$ : $\Delta = 1+24 = 25$, racines $\dfrac{-1-5}{-2} = 3$ et $\dfrac{-1+5}{-2} = -2$ ; $a = -1 < 0$ : négatif à l'extérieur des racines.

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $2$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2x-4$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $-x^2+x+6$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $A(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

## Corrigé de l'application 5

$$\frac{3}{x-1} \geqslant x+1 \iff \frac{3}{x-1} - (x+1) \geqslant 0 \iff \frac{3-(x+1)(x-1)}{x-1} \geqslant 0 \iff \frac{4-x^2}{x-1} \geqslant 0.$$

- $4-x^2 = (2-x)(2+x)$ : racines $-2$ et $2$ ; $a = -1 < 0$ : négatif à l'extérieur des racines.
- $x-1$ s'annule en $1$ (valeur interdite).

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $4-x^2$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $x-1$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $\dfrac{4-x^2}{x-1}$ | | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | |

$S = ]-\infty\,;-2] \cup ]1\,;2]$.

## Corrigé de l'application 6

**1** $B(q) \geqslant 0 \iff -2(q^2-40q+300) \geqslant 0 \iff q^2-40q+300 \leqslant 0$.
$\Delta = 1600-1200 = 400$, racines $\dfrac{40-20}{2} = 10$ et $\dfrac{40+20}{2} = 30$ ; négatif entre les racines.
L'entreprise ne perd pas d'argent pour $q \in [10\,;30]$ (contenu dans $[0\,;50]$).

**2** $B(q) > 150 \iff -2q^2+80q-750 > 0 \iff q^2-40q+375 < 0$.
$\Delta = 1600-1500 = 100$, racines $\dfrac{40-10}{2} = 15$ et $\dfrac{40+10}{2} = 25$.
Le bénéfice dépasse $150$ euros pour $q \in ]15\,;25[$, c'est-à-dire pour $16$ à $24$ objets (car $q$ est entier).

### Corrigé de l'application 7

**1** $h(t) > 15 \iff -5t^2 + 20t - 15 > 0 \iff t^2 - 4t + 3 < 0$ (on divise par $-5 < 0$ : le sens change).
Racines $1$ et $3$ ($\Delta = 4$) ; négatif entre les racines : $t \in ]1\,;3[$.
La balle est à plus de $15$ m pendant $3 - 1 = 2$ secondes.

**2** $h(t) \geqslant 20 \iff -5t^2 + 20t - 20 \geqslant 0 \iff t^2 - 4t + 4 \leqslant 0 \iff (t-2)^2 \leqslant 0 \iff t = 2$.
La balle n'atteint $20$ m qu'à l'instant $t = 2$ s : la hauteur maximale est $20$ m.

### Corrigé de l'application 8

$a = 1 > 0$. Le polynôme est strictement positif pour tout réel $x$ si et seulement s'il n'a aucune racine, c'est-à-dire $\Delta < 0$ (si $\Delta \geqslant 0$, il s'annule au moins une fois).
$\Delta = m^2 - 4$. On résout l'inéquation du second degré *d'inconnue* $m$ : $m^2 - 4 < 0$.
Racines $-2$ et $2$, coefficient $1 > 0$ : négatif entre les racines. Donc $m \in ]-2\,;2[$.