# Cours - Limite d'une fonction numérique - 1BACSEG

*Ce Cours est présenté par le Professeur : Bouyguir Taher*

## 1 Introduction

Prenons par exemple la fonction $f(x) = \frac{x^{2-1}}{x-1}$, il est claire que la valeur interdite par la fonction $f$ est 1 car en effet : $f(1) = \frac{1^2-1}{1-1} = \frac{0}{0} = indterminer$ donc $f(1)$ n'existe pas , mais ça ne veut pas dire que nous pouvons rien faire ! , on peut se demandé de posé la question suivante : si $x$ vaut (se rapproche de )1 la fonction $f(x)$ vaut quoi ?, ça ce qu'on va voir dans le tableau suivant :

| $x$ | 0.9 | 0.99 | 0.999 | $\cdots$ | 0.999.... |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 1.9 | 1.99 | 1.999 | $\cdots$ | 1.9999... $\simeq 2$ |

Donc de plus $x$ se rapproche de 1, $f(x)$ rapproche de 2 , On peut écrire mathématiquement : $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$, ce qui signifie que la limite quand $x$ tend vers 1 de $f(x)$ égale a 2.
Voici les grandes lignes qu'on va traiter dans ce cours :

1. **Limite finie en un point**
2. **Limite à droite et à gauche en un point**
3. **Limite infinie en un point**
4. **Limite finie en l'infinie** $(\infty)$
5. **Limite infinie** $(\infty)$ **en l'infinie** $(\infty)$
6. **Les opérations sur les limites**
7. **Quelque méthode pour lever une indétermination**
8. **Exercices résolus**

---

## 2 Limite finie en un point $a$

**Activité 1 :**

On considère la fonction $f$ définie par : $f(x) = x^2$ , Compléter le tableau suivant :

| $x$ | $-10^{-2}$ | $-10^{-6}$ | $-10^{-10}$ | $-10^{-100}$ | $\to 0 \leftarrow$ | $10^{-100}$ | $10^{-10}$ | $10^{-2}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $10^{-4}$ | $10^{-12}$ | $10^{-20}$ | $10^{-200}$ | $\simeq 0$ | $10^{-200}$ | $10^{-20}$ | $10^{-4}$ |

Remarquons que de plus $x$ rapproche de 0 , $f(x)$ aussi rapproche de 0 , alors on peut écrire $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.
De même déterminer les limites suivantes :

a) $\lim_{x\to 0} x^3$ b) $\lim_{x\to 0} x^n$ ; $(n \in \mathbb{N}^*)$ c) $\lim_{x\to 0} |x|$

d) $\lim_{x\to 0} \sqrt{|x|}$ e) $\lim_{x\to 0} a\,|x|$ ; $(a \in \mathbb{R})$

### Définition 1 :

Soit $a$ un réel et $f$ une fonction définie au voisinage de $a$ (mais pas nécessairement en $a$).

On dit que $f$ a comme limite $l$ en $a$ si, le nombre $f(x)$ s'approche de $l$ quand $x$ tend vers $a$. on écrit : $\lim_{x\to a} f(x) = l$ ou $\lim_{a} f(x) = l$.

### Propriété 1 :

Soit $f$ et $u$ deux fonctions définies sur $I \setminus \{a\}$ (au voisinage de $a$) et soit $l \in \mathbb{R}$ telles que : $|f(x) - l| \leq u(x)$ ; $\forall x \in I \setminus \{a\}$. si $\lim_{x\to a} u(x) = 0$ alors $\lim_{x\to a} f(x) = l$

### Exemple 1 :

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + 3$.

1. Montrer que $|f(x) - 3| \leq |x|$ ; $(\forall x \in \mathbb{R})$.
2. Déduire $\lim_{x\to 0} f(x)$

♠ Solution

1. Montrons que $(\forall x \in \mathbb{R})$ ; $|f(x) - 3| \leq |x|$.
   On a $|f(x) - 3| = \left|\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + 3 - 3\right| = \left|\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right| = \frac{|x|}{\sqrt{|1+x^2|}} = \frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}$, (car $(\forall x \in \mathbb{R})$ ,$\sqrt{1+x^2} \geq 0$) , Donc $|f(x) - 3| = \frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}$ , alors pour montrer que $|f(x) - 3| \leq |x|$ il suffit de montrer que $\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} \leq |x|$ .
   On a $x^2 \geq 0 \Leftrightarrow 1 + x^2 \geq 1 \Leftrightarrow \sqrt{1+x^2} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} \leq |x|$ (car $|x| \geq 0$). D'où finalement : $(\forall x \in \mathbb{R})$ ; $|f(x) - 3| \leq |x|$.
2. Déduisons $\lim_{x\to 0} f(x)$
   On a $(\forall x \in \mathbb{R})$ ; $|f(x) - 3| \leq |x|$ , avec $\lim_{x\to 0} |x| = 0$ et d'après la propriété donc : $\lim_{x\to 0} f(x) = 3$.

## 3 Limite à droite et à gauche en un point $a$

### Activité 2 :

1. On considère la fonction $f$ définie par : $f(x) = \frac{x(x^2+1)}{|x|}$ , Compléter le tableau suivant :

| $x$ | $-10^{-2}$ | $-10^{-6}$ | $-10^{-10}$ | $-10^{-50}$ | $\to 0 \leftarrow$ | $10^{-50}$ | $10^{-10}$ | $10^{-2}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-0.99$ | $-0.9999$ | $-0.999...$ | $-0.99999...$ | $\to -1 \vert 1 \leftarrow$ | $0.9999...$ | $0.999...$ | $0.99$ |

   Remarquons que de plus $x$ rapproche de 0 à droite, $f(x)$ rapproche de 1 , et si $x$ rapproche de 0 à gauche, $f(x)$ rapproche de $-1$, on peut écrire $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = -1$ .
2. Soit $g$ une fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par :

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 3x & \text{si } x < 1 \\ 2x^2 + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

   (a) Vérifier que $\lim_{x\to 1} x^2 - 3x = -2$ et $\lim_{x\to 1} 2x^2 + 1 = 3$.

   (b) Déduire $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} g(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} g(x)$.

   ♠ Solution

(a) Vérifions que $\lim_{x\to 1} x^2-3x=2$ et $\lim_{x\to 1} 2x^2+1=3$.

On a $\lim_{x\to 1} x^2-3x=1^2-3\times 1=1-3=-2$ et $\lim_{x\to 1} 2x^2+1=2\times 1^2+1=3$

(b) Déduisons $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} g(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} g(x)$. Pour $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} g(x)$ , on a $x$ tend vers 1 tel que $x>1$ , et si $x>1$ : $g(x)=2x^2+1$ , donc $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} g(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} 2x^2+1=2\times 1^2+1=3$.

De même pour $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} g(x)$ , on a $x<1$ donc $g(x)=x^2-3x$ Alors : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} g(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} x^2-3x=1^2-3\times 1=1-3=-2$.

3. $h$ est la fonction définie par : $h(x)=\frac{x(x^2-4)}{|x-2|}$ , Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} h(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} h(x)$.

♠ Solution

Avant de calculer les limites, nous devons enlever la valeur absolue dans chaque limite.

Pour la limite à droite de 2 : $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} h(x)$ . on a $x$ rapproche de 2 avec $x>2$ donc $x-2>0$ alors $|x-2|=x-2$, alors la limite devient :

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} h(x)=\lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \frac{x(x^2-4)}{|x-2|}=\lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \frac{x(x^2-4)}{x-2}=\lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \frac{x(x-2)(x+2)}{x-2}=x(x+2)=2(2+2)=8$$

Pour la limite à gauche de 2 : $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} h(x)$ . on a $x$ rapproche de 2 avec $x<2$ donc $x-2<0$ alors $|x-2|=-(x-2)$, alors la limite devient :

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} h(x)=\lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \frac{x(x^2-4)}{|x-2|}=\lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \frac{x(x^2-4)}{-(x-2)}=\lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \frac{x(x-2)(x+2)}{-(x-2)}=-x(x+2)=-2(2+2)=-8$$

## Définition 2 :

Soit $r>0$ et $a$ un réel ▸ On dite que une fonction $f$ définie sur $]a;a+r[$, admet une limite finie $l$ à droite de $a$, si les valeurs de $f(x)$ s'approchent de plus en plus de $l$ lorsque $x$ tend vers $a$ en prenant des valeurs supérieurs à $a$. et on écrit : $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)=l$ ou $\lim_{x\to a^+} f(x)=l$

▸ On dite que une fonction $f$ définie sur $]a-r;a[$, admet une limite finie $l$ à gauche de $a$, si les valeurs de $f(x)$ s'approchent de plus en plus de $l$ lorsque $x$ tend vers $a$ en prenant des valeurs inférieurs à $a$. et on écrit : $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)=l$ ou $\lim_{x\to a^-} f(x)=l$

## Exemple 2 :

Calculer la limite à droite et à gauche de $a$ dans les cas suivants :

a) $f(x)=\frac{x(x+1)}{|x|}$ ; $a=0$ b) $g(x)=\frac{x(x-3)}{|x-3|}$ ; $a=3$ c) $s(x)=|x-1|\,x^2$ ; $a=1$

♠ Solution

1. Calculons la limite à droite et à gauche de 0 de $f(x)=\frac{x(x+1)}{|x|}$

Pour la limite à droite de 0, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$ . on a $x$ rapproche de 0 avec $x>0$ donc $|x|=x$, alors la limite devient :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} \frac{x(x+1)}{|x|}=\lim_{x\to 0^+} \frac{x(x+1)}{x}=\lim_{x\to 0^+}(x+1)=0+1=1$$

Pour la limite à gauche de 0, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)$ . on a $x$ rapproche de 0 avec $x<0$ donc $|x|=-x$, alors la limite devient :

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} \frac{x(x+1)}{|x|}=\lim_{x\to 0^-} \frac{x(x+1)}{-x}=\lim_{x\to 0^-} -(x+1)=-(0+1)=-1$$

2. Calculons la limite à droite et à gauche de 3 de $g(x)=\frac{x(x-3)}{|x-3|}$

Pour la limite à droite de 3, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x)$ . on a $x>3$ donc $x-3>0$ alors $|x-3|=x-3$, alors la limite devient :

$$\lim_{x\to 3^+} g(x) = \lim_{x\to 3^+} \frac{x(x-3)}{|x-3|} = \lim_{x\to 3^+} \frac{x(x-3)}{x-3} = \lim_{x\to 3^+} x = 3$$

Pour la limite à gauche de 3, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} g(x)$ . on a $x < 3$ donc $x-3 < 0$ alors $|x-3| = -(x-3)$, alors la limite devient :

$$\lim_{x\to 3^-} g(x) = \lim_{x\to 3^-} \frac{x(x-3)}{|x-3|} = \lim_{x\to 3^-} \frac{x(x-3)}{-(x-3)} = \lim_{x\to 3^-} -x = -3$$

3. Calculons la limite à droite et à gauche de 1 de $s(x) = |x-1|\,x^2$

Pour la limite à droite de 1, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>1}} s(x)$ . on a $x > 1$ donc $x-1 > 0$ alors $|x-1| = x-1$, alors la limite devient :

$$\lim_{x\to 1^+} s(x) = \lim_{x\to 1^+} |x-1|\,x^2 = \lim_{x\to 1^+} (x-1)x^2 = (1-1)1^2 = 0$$

Pour la limite à gauche de 1, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<1}} s(x)$ . on a $x < 1$ donc $x-1 < 0$ alors $|x-1| = -(x-1)$, alors la limite devient :

$$\lim_{x\to 1^-} s(x) = \lim_{x\to 1^-} |x-1|\,x^2 = \lim_{x\to 1^-} -(x-1)x^2 = -(1-1)1^2 = 0$$

♠ De même calculer les limites suivantes : à faire !

a) $\lim\limits_{x\to 3^+} \frac{x(x-3)^2}{x|x-3|}$ b) $\lim\limits_{x\to 3^-} \frac{x(x-3)^2}{x|x-3|}$ c) $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{|x-1|}{x+1}$

d) $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{|x-1|}{x+1}$ e) $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{x^2-2x}{|x-2|}$ f) $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{x^2-2x}{|x-2|}$

## Propriété 2 :

Soit $f$ une fonction définie sur $I \setminus \{a\}$ (au voisinage de $a$) et soit $l \in \mathbb{R}$.

Pour que $f$ admet une limite en $a$ , il faut et il suffit qu'elle admette la limite $l$ à droite et à gauche de $a$.

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \Longleftrightarrow (\lim_{x\to a^+} f(x) = l \ et \ \lim_{x\to a^-} f(x) = l)$$

## Exemple :

Dans l'exemple 2 : 1) On trouve que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -1$ dans ce cas on dit que $f$ n'admet pas de limite en 0 car : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$.

Par contre la fonction $s$ admet une limite en 1 car $\lim\limits_{x\to 1^+} s(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} s(x) = 0$ alors $\lim\limits_{x\to 1^+} s(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} s(x)$ .

# 4 Limite infinie en un point $a$

## Définition 3 :

Soit $a$ un réel et $f$ une fonction définie au voisinage de $a$ (mais pas nécessairement en $a$).

On dit que $f$ a comme limite $+\infty$ lorsque $x$ tend vers $a$ si, pour tout nombre $A$, l'intervalle $]A;+\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour $x$ suffisamment proche de $a$. (voir figure 1). on écrit : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{a} f(x) = +\infty$

On dit que $f$ a comme limite $-\infty$ lorsque $x$ tend vers $a$ si, pour tout nombre $A$, l'intervalle $]+\infty;A[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour $x$ suffisamment proche de $a$. on écrit : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{a} f(x) = -\infty$.

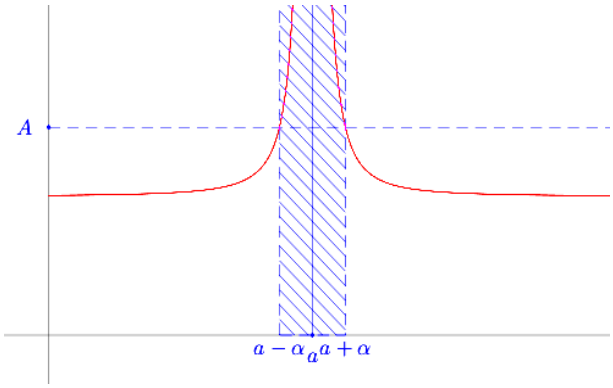



Figure 1 – Limite infinie lorsque $x$ tend vers le réel $a$

## Exemple 3 :- limites usuelles

.

a) $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ b) $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$ c) $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^3} = +\infty$

d) $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ e) $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ f) $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty$

g) $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^3} = -\infty$ h) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ i) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{|x|}} = +\infty$

## Remarque 1 :

Soit $k \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$ , on a les limites suivantes :

■ si $k > 0$ alors :

a) $\lim_{x\to 0^+} \frac{k}{x^n} = +\infty$ b) $\lim_{x\to 0^+} \frac{k}{\sqrt{x}} = +\infty$

a) $\lim_{x\to 0^-} \frac{k}{x^n} = +\infty$ ; si ($n$ pair) b) $\lim_{x\to 0^-} \frac{k}{x^n} = -\infty$ ; si ($n$ impair)

■ si $k < 0$ alors :

a) $\lim_{x\to 0^+} \frac{k}{x^n} = -\infty$ b) $\lim_{x\to 0^+} \frac{k}{\sqrt{x}} = -\infty$

a) $\lim_{x\to 0^-} \frac{k}{x^n} = -\infty$ ; si ($n$ pair) b) $\lim_{x\to 0^-} \frac{k}{x^n} = +\infty$ ; si ($n$ impair)

## Proposition 3 :

Soit $u$ et $v$ deux fonctions définies sur $I \setminus \{a\}$ (au voisinage de $a$) telles que : $u(x) \geq v(x)$ ; $\forall x \in I \setminus \{a\}$.

■ si $\lim_{x\to a} v(x) = +\infty$ alors : $\lim_{x\to a} u(x) = +\infty$.

■ si $\lim_{x\to a} u(x) = -\infty$ alors : $\lim_{x\to a} v(x) = -\infty$.

## Exemple 4 :

On considère la fonction $f$ définie sur $I = ]-2;2[\setminus\{0\}$ par : $f(x) = \frac{1+\sqrt{4-x^2}}{x^4}$.

1. Montrez que $(\forall x \in I)$ ; $f(x) \geq \frac{1}{x^4}$
2. Déduire $\lim_{x\to 0} f(x)$

♠ Solution

1. Montrez que $(\forall x \in I)\,;\ f(x) \geq \frac{1}{x^4}$.

   On a $(\forall x \in I)\,;\ f(x) - \frac{1}{x^4} = \frac{1+\sqrt{4-x^2}}{x^4} - \frac{1}{x^4} = \frac{1+\sqrt{4-x^2}-1}{x^4} = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^4} \geq 0$. (car $\sqrt{4-x^2} \geq 0$ , et $x^4 \geq 0$ , $(\forall x \in I)$ ) . Donc $f(x) - \frac{1}{x^4} \geq 0$ d'où $f(x) \geq \frac{1}{x^4}$ , $(\forall x \in I)$.

2. Déduire $\lim_{x\to 0} f(x)$.

   On a $f(x) \geq \frac{1}{x^4}$ , $(\forall x \in I)$. avec $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^4} = +\infty$ , alors d'après la proposition $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$ (en effet : $u(x) = f(x)$ et $v(x) = \frac{1}{x^4}$ ).

## Remarque 2 : IMPORTANT

Soit $f$ et $g$ deux fonctions définies sur $I \setminus \{a\}$ (au voisinage de $a$).

On s'intéresse a calculer : $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$.

■ si $g(a) \neq 0$ alors : $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)}$. (y'a pas de problème ici il suffit de remplacer $x$ par $a$ )

■ si $g(a) = 0$ dans ce cas on va traiter de limites : la limite à droite $(x \to a^+)$ et la limite à gauche $(x \to a^-)$.

♣ Pour la limite à droite, c-à-d : $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ . la première étape consiste à étudier le signe de $g(x)$ tel que $(x > a)$ .et on trouve les résultats dans le tableau ci-dessous :

♣ Pour la limite à gauche, c-à-d : $\lim_{x\to a^-} \frac{f(x)}{g(x)}$ . Nous étudions le signe de $g(x)$ tel que $(x < a)$ .et on trouve les résultats dans le tableau ci-dessous :

| Signe de $f(a)$ | $f(a) > 0$ | $f(a) > 0$ | $f(a) < 0$ | $f(a) < 0$ |
|---|---|---|---|---|
| Signe de $g(x)$ | $g(x) > 0$ | $g(x) < 0$ | $g(x) > 0$ | $g(x) < 0$ |
| $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |

## Exemple 5 :

Calculez les limites suivantes :

a) $\lim_{x\to 2^+} \frac{1+x}{x-2}$ b) $\lim_{x\to 5^+} \frac{x^2-5}{5-x}$ c) $\lim_{x\to 5} \frac{x^2-5}{(5-x)^2}$

d) $\lim_{x\to 5^-} \frac{x^2-5}{(-x+5)}$ e) $\lim_{x\to 0^+} \frac{1+\sqrt{x}}{x}$ f) $\lim_{x\to 0^+} \frac{1+\sqrt{x}}{x^2-x}$

g) $\lim_{x\to 1^-} \frac{-1}{x^2-1}$ h) $\lim_{x\to 2} \frac{-1}{|x-2|}$ i) $\lim_{x\to 2} \frac{3x-1}{|x-2|(x-2)}$

## Correction de l'exemple

1. $\lim_{x\to 2^+} \frac{1+x}{x-2} = ?$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 2^+}(1+x) = 3 \\ \lim_{x\to 2^+}(x-2) = 0 \end{array}\right\} \text{il faut étudier le signe de } x-2$$

   On a $x \to 2^+$ c-à-d $x > 2$ donc $x - 2 > 0$ ; Par suite, comme la limite du numérateur est positive $(3 > 0)$ , donc $\lim_{x\to 2^+} \frac{1+x}{x-2} = +\infty$.

2. $\lim_{x\to 5^+} \frac{x^2-5}{5-x} = ?$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 5^+}(x^2-5) = 25-5 = 20 \\ \lim_{x\to 5^+}(5-x) = 0 \end{array}\right\} \text{il faut étudier le signe de } 5-x$$

On a $x \to 5^+$ c-à-d $x > 5$ donc $5 - x < 0$ ; Par suite, comme la limite du numérateur est positive $(20 > 0)$ , donc $\lim_{x\to 5^+} \frac{x^2-5}{5-x} = -\infty$.

3. $\lim_{x\to 0^+} \frac{1+\sqrt{x}}{x^2-x} = ?$

$$\left.\begin{array}{c} \lim_{x\to 0^+}(1+\sqrt{x}) = 1+0 = 1 \\ \lim_{x\to 0^+}(x^2-x) = 0 \end{array}\right\} \text{il faut étudier le signe de } x^2 - x$$

le signe est résumé dans le tableau suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $0^+$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2 - x$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Alors lorsque $x$ tend vers $0^+$, d'après le tableau $x^2 - x < 0$ , Par suite, comme la limite du numérateur est positive $(1 > 0)$ , donc $\lim_{x\to 0^+} \frac{1+\sqrt{x}}{x^2-x} = -\infty$.

4. $\lim_{x\to 2} \frac{1-3x}{|x-2|(x-2)} = ?$

$$\left.\begin{array}{c} \lim_{x\to 2}(1-3x) = 1-3\times 2 = -5 \\ \lim_{x\to 2}(|x-2|(x-2)) = 0 \end{array}\right\} \text{il faut étudier le signe de } |x-2|(x-2)$$

On a deux cas si $x > 2$ ou $x < 2$, donc on va calculer la limite à droite et à gauche en 2.

♣ si $x > 2$ (limite à droite), donc $x-2 > 0$ et $|x-2| = x-2$ donc : $|x-2|(x-2) = (x-2)(x-2) = (x-2)^2 > 0$, et puisque la limite du numérateur est négative $(-5 < 0)$ , donc$\lim_{x\to 2^+} \frac{1-3x}{|x-2|(x-2)} = -\infty$.

♣ si $x < 2$ (limite à gauche), donc $x - 2 < 0$ et $|x-2| = -(x-2)$ donc : $|x-2|(x-2) = -(x-2)(x-2) = -(x-2)^2 < 0$, et puisque la limite du numérateur est négative $(-5 < 0)$ , donc$\lim_{x\to 2^-} \frac{1-3x}{|x-2|(x-2)} = +\infty$.

## 5 Limite finie en $+\infty$ et $-\infty$

### Définition 4 :

Soit $f$ une fonction définie sur l'intervalle $[a;+\infty[$ et $l$ un nombre réel.

On dit que $f$ a comme limite $l$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$ si tout intervalle ouvert contenant $l$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour $x$ suffisamment grand (voir figure 2).On note alors : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$ ou$\lim_{+\infty} f(x) = l$.

**Remarque :** Graphiquement, ceci signifie que la courbe représentant $f$ se rapproche de plus en plus de la droite $y = l$ lorsque $x$ devient grand (voir figure 2).

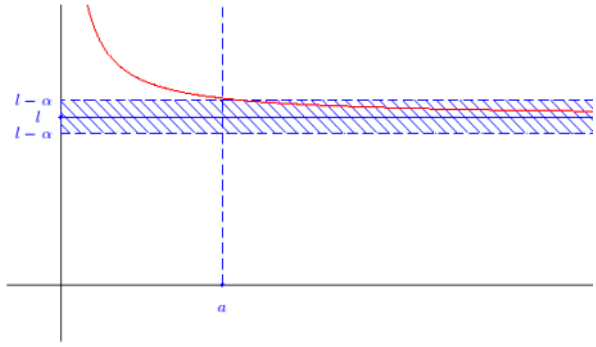



Figure 2 – Limite finie lorsque $x$ tend vers $+\infty$

## Exemple 6- limite usuelles

.

a) $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ b) $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$ c) $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^n}=0$ $(n\in\mathbb{N}^*)$

d) $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$ e) $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=0$ f) $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^n}=0$ $(n\in\mathbb{N}^*)$

## Proposition 5 :

Soit $f$ et $u$ deux fonctions définies sur un intervalle de type $]a;+\infty[$ et $l\in\mathbb{R}$.

Si : $(\forall x\in]a;+\infty[)$ : $|f(x)-l|\leq u(x)$ et $\lim_{x\to+\infty}u(x)=0$, Donc $\lim_{x\to+\infty}f(x)=l$

## Exemple 7 :

1. On considère la fonction : $f(x)=\frac{2x^2+1}{x^2+2}$.
   Montrez que $|f(x)-2|\leq\frac{3}{x^2}$, puis déduire : $\lim_{x\to+\infty}f(x)$.
2. Montrez que $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x^2+3}=2$

♠ Solution

1. D'abord montrons que $|f(x)-2|\leq\frac{3}{x^2}$ ; on a $|f(x)-2|=|\frac{2x^2+1}{x^2+2}-2|=|\frac{2x^2+1}{x^2+2}-\frac{2(x^2+2)}{x^2+2}|=|\frac{2x^2+1-2(x^2+2)}{x^2+2}|=|\frac{2x^2+1-2x^2-4}{x^2+2}|=|\frac{-3}{x^2+2}|=\frac{|-3|}{|x^2+2|}=\frac{3}{x^2+2}$. (car $|-3|=3$ et $|x^2+2|=x^2+2$).
   Alors $|f(x)-2|=\frac{3}{x^2+2}$, Par suite on va comparer $|f(x)-2|$ et $\frac{3}{x^2}$ donc il suffit de comparer $\frac{3}{x^2+2}$ et $\frac{3}{x^2}$
   On sait que pour tout réel $x$ ; $2\geq0\iff x^2+2\geq x^2\iff\frac{1}{x^2+2}\leq\frac{1}{x^2}\iff\frac{3}{x^2+2}\leq\frac{3}{x^2}\iff|f(x)-2|\leq\frac{3}{x^2}$
   donc on a trouver le résultat voulu .
   Calculons $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ ; on a déjà montrer que $|f(x)-2|\leq\frac{3}{x^2}$ avec $\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x^2}=0$ , (car $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$ et $3\times0=0$ ), donc $\lim_{x\to+\infty}f(x)=2$
2. Montrons que $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x^2+3}=2$ , donc on va montrer que $|\frac{2x^2}{x^2+3}-2|\leq u(x)$ tel que $\lim_{x\to+\infty}u(x)=0$.
   On a $|\frac{2x^2}{x^2+3}-2|=|\frac{2x^2}{x^2+3}-\frac{2(x^2+3)}{x^2+3}|=|\frac{2x^2-2x^2-6}{x^2+3}|=|\frac{-6}{x^2+3}|=\frac{|-6|}{|x^2+3|}=\frac{6}{x^2+3}$, alors $|\frac{2x^2}{x^2+3}-2|=\frac{6}{x^2+3}$ , il est claire que $\frac{6}{x^2+3}\leq\frac{6}{x^2}$ (en effet $x^2+3\geq x^2\iff\frac{1}{x^2+3}\leq\frac{1}{x^2}\iff\frac{6}{x^2+3}\leq\frac{6}{x^2}$ ) , d'où : $|\frac{2x^2}{x^2+3}-2|\leq\frac{6}{x^2}$ , et puis que $\lim_{x\to+\infty}\frac{6}{x^2}=0$ donc $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x^2+3}=2$

# 6 Limite infinie en $+\infty$ et $-\infty$

## Définition 5 :

Soit $f$ une fonction définie sur l'intervalle $[a;+\infty[$ et $l$ un nombre réel.

On dit que $f$ a comme limite $+\infty$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$, si pour nombre $A$ l'intervalle $]A;+\infty[$ contient toutes les valeurs de f (x) pour x suffisamment grand (voir figure 3).On note alors : $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ oulim$_{+\infty}f(x)=+\infty$.

**Remarque :** On peut définir de manière analogue $\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ , $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ et $\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$.

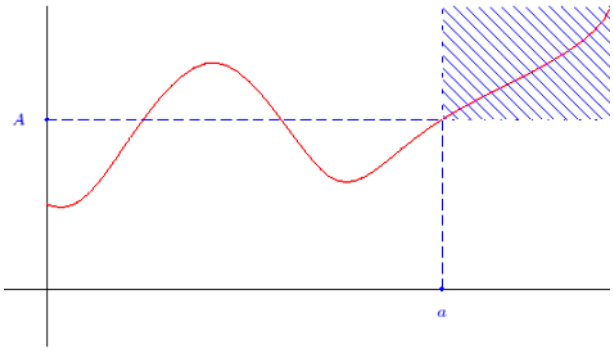



Figure 3 – Limite $+\infty$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$

## Exemple 8 - limite usuelles

.

a) $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$ b) $\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ c) $\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$ $(n \in \mathbb{N}^*)$

d) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ e) $\lim_{x\to-\infty} x = -\infty$ f) $\lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$

a) $\lim_{x\to-\infty} x^n = +\infty$ (si $n$ est pair) b) $\lim_{x\to-\infty} x^n = -\infty$ (si $n$ est impair)

## Proposition 6 :

Soit $u$ et $v$ deux fonctions définies sur $]a;+\infty[$ telles que : $u(x) \geq v(x)$ ; $\forall x \in ]a;+\infty[$.

- si $\lim_{x\to+\infty} u(x) = +\infty$ alors : $\lim_{x\to+\infty} v(x) = +\infty$.
- si $\lim_{x\to+\infty} v(x) = -\infty$ alors : $\lim_{x\to+\infty} u(x) = -\infty$.

## Exemple 9 :

On considère la fonction $u(x) = x - \sqrt{9x^2+1}$ définie sur $]0;+\infty[$.

a) Montrez que $u(x) \leq -2x$ $(\forall x \in [0;+\infty[)$. b) Déduire $\lim_{x\to+\infty} u(x)$

♠ Solution

1. Montrons que $u(x) \leq -2x$ $(\forall x \in [0;+\infty[)$.

   Il suffit de montrer que $u(x) - (-2x) \leq 0$ $(\forall x \in [0;+\infty[)$ ; on a $u(x) - (-2x) = x - \sqrt{9x^2+1} + 2x = 3x - \sqrt{9x^2+1} = \frac{(3x-\sqrt{9x^2+1})(3x+\sqrt{9x^2+1})}{3x+\sqrt{9x^2+1}} = \frac{(3x)^2-(\sqrt{9x^2+1})^2}{3x+\sqrt{9x^2+1}} = \frac{9x^2-(9x^2+1)}{3x+\sqrt{9x^2+1}} = \frac{9x^2-9x^2-1}{3x+\sqrt{9x^2+1}} = \frac{-1}{3x+\sqrt{9x^2+1}}$ ,

   puisque $x \in [0;+\infty[$ $3x \geq 0$ et $\sqrt{9x^2+1} \geq 0$ avec $-1 \leq 0$ donc ; $\frac{-1}{3x+\sqrt{9x^2+1}} \leq 0$ Alors : $u(x) - (-2x) \leq 0$ d'où : $u(x) \leq -2x$ .

2. Déduire $\lim_{x\to+\infty} u(x)$ .

   On a déjà montrer que $u(x) \leq -2x$ et on a $\lim_{x\to+\infty} -2x = -\infty$ donc $\lim_{x\to+\infty} u(x) = -\infty$ (d'après la proposition).

# 7 Les opérations sur les limites

## Limite de somme de deux fonction

$(a \in \mathbb{R}$ ou $a = \pm\infty)$ et $(l, l' \in \mathbb{R})$ ; $F.I$ désigne Forme Indéterminé.

| $\lim_{x\to a} f(x)$ | $l$ | $l$ | $l$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim_{x\to a} g(x)$ | $l'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))$ | $l+l'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $F.I$ |

## Limite de produit de deux fonction

$(a \in \mathbb{R}$ ou $a = \pm\infty)$ et $(l, l' \in \mathbb{R})$ ; $F.I$ désigne Forme Indéterminé.

| $\lim_{x\to a} f(x)$ | $l$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ ou $-\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim_{x\to a} g(x)$ | $l'$ | $l' > 0$ | $l' < 0$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $0$ |
| $\lim_{x\to a}(f(x)\times g(x))$ | $l\times l'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $F.I$ |

## Limite inverse/racine fonction

$(a \in \mathbb{R}$ ou $a = \pm\infty)$ et $(l \in \mathbb{R})$.

Pour l'inverse :

| $\lim_{x\to a} f(x)$ | $l$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $0^+$ | $0^-$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)}$ | $\frac{1}{l}$ | $0$ | $0$ | $+\infty$ | $-\infty$ |

Pour la racine :

| $\lim_{x\to a} f(x)$ | $l \geq 0$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $\lim_{x\to a} \sqrt{f(x)}$ | $\sqrt{l}$ | $0$ | $+\infty$ |

## Limite de quotient de deux fonction

$(a \in \mathbb{R}$ ou $a = \pm\infty)$ et $(l, l' \in \mathbb{R})$ ; $F.I$ désigne Forme Indéterminée.

| $\lim_{x\to a} f(x)$ | $l$ | $l>0$ | $l>0$ | $l<0$ | $l<0$ | $0$ | $0$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim_{x\to a} g(x)$ | $l' \neq 0$ | $0^+$ | $0^-$ | $0^+$ | $0^-$ | $+\infty$ ou $-\infty$ | $0$ | $l'>0$ | $l'<0$ | $l'>0$ | $l'<0$ | $\infty$ |
| $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ | $\frac{l}{l'}$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $0$ | $F.I$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $F.I$ |

## Remarque 3 : IMPORTANT

★ L'obtention d'une forme indéterminée "F.I" signifie que la méthode mise en place pour calculer la limite de la fonction trébuche, Cela signifie en aucun cas que la fonction n'a pas de limite.

★ Des méthode seront présentés au fur et à mesure pour lever les indétermination les plus classiques à savoir : $\ll \frac{0}{0}$ ; $\frac{\infty}{\infty}$ ; $0\times\infty$ ; $+\infty+(-\infty) \gg$.

♠ Attention : NE JAMAIS l'écrire sur la copie : $\ll +\infty-(-\infty)=+\infty \gg$ ;$\ll +\infty+l=+\infty \gg$ ; $\ll +\infty\times(+\infty)=+\infty \gg$ , $\ll \frac{-3}{+\infty}=0 \gg$, $\ll \frac{1}{0^+}=+\infty \gg$ , ⋯

# 8 Quelques méthode pour lever une indétermination

## Limite d'une fonction polynôme en $\infty$

Soit $P$ une fonction polynôme définie par : $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 + a_0$.

La limite d'une fonction polynôme en $+\infty$ ou $-\infty$ est la limite du monôme de plus grand dégrée (le terme de grand ordre) : $\lim_{x\to+\infty} P(x) = \lim_{x\to+\infty} a_n x^n$ (de même pour $-\infty$)

## Exemple

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim_{x\to+\infty} 2x^3 + x^2 - 1$

b) $\lim_{x\to+\infty} -3x^5 - x^4 + x^2$

c) $\lim_{x\to-\infty} 7x^{12} + 2x^9 - 5$

d) $\lim_{x\to-\infty} x^3 - x^9 + 5x^5$

♠ Solution

1. $\lim_{x\to+\infty} 2x^3 + x^2 - 1 = \lim_{x\to+\infty} 2x^3 = +\infty$ (car le monôme de plus grand dégrée est $2x^3$)
2. $\lim_{x\to+\infty} -3x^5 - x^4 + x^2 = \lim_{x\to+\infty} -3x^5 = -\infty$
   (car le monôme de plus grand dégrée est $-3x^5$ et $x^5 \Rightarrow +\infty$ et $-3 < 0$ )
3. $\lim_{x\to-\infty} 7x^{12} + 2x^9 - 5 = \lim_{x\to-\infty} 7x^{12} = +\infty$
   (car le monôme de plus grand dégrée est $7x^{12}$ et $x^{12} \Rightarrow +\infty$ (12 pair) et $7 > 0$ ).
4. $\lim_{x\to-\infty} x^3 - x^9 + 5x^5 = \lim_{x\to-\infty} -x^9 = +\infty$
   (car le monôme de plus grand dégrée est $-x^9$ et $x^9 \Rightarrow -\infty$ (9 impair) et $-1 < 0$ ).

## Limite d'une fonction rationnelle en $\infty$

Soit $P$ et $Q$ deux fonctions polynômes définies par : $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 + a_0$ et $Q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 + b_0$

La limite d'une fonction rationnelle en $+\infty$ ou $-\infty$ est la limite du quotients des monôme de plus grand dégrée (les termes de grand ordre) : $\lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$ (de même pour $-\infty$)

## Exemple 10 :

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3+x^2-1}{5x^2+x-1}$

b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{-3x^5-x^4+x^2}{x^6-1}$

c) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^7-13x^6+1}{2x^9-x^6+1}$

d) $\lim_{x\to-\infty} \frac{-9x^5+x^2-1}{-5x^5+x^4-1}$

♠ Solution

1. $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3+x^2-1}{5x^2+x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3}{5x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{5}x = +\infty$ (car $\frac{2}{5} > 0$ et $x \Rightarrow +\infty$ )
2. $\lim_{x\to+\infty} \frac{-3x^5-x^4+x^2}{x^6-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-3x^5}{x^6} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-3}{x} = 0$ (car $\frac{1}{x} \Rightarrow 0$ quand $x \Rightarrow +\infty$ )
3. $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^7-13x^6+1}{2x^9-x^6+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^7}{2x^9} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2x^2} = 0$ (car $\frac{1}{x^2} \Rightarrow 0$ quand $x \Rightarrow +\infty$ ).
4. $\lim_{x\to-\infty} \frac{-9x^5+x^2-1}{-5x^5+x^4-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-9x^5}{-5x^5} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-9}{-5} = \frac{-9}{-5} = \frac{9}{5}$ .

♠ en utilisant la même méthode résoudre l'exercice n°1 de la série des exercices à faire !

## Méthode de factorisation "Lever F.I : $\frac{0}{0}$"

Soit $f$ et $g$ deux fonctions et $a \in \mathbb{R}$ : On veut calculer : $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = ?$

On a 3 cas

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} \frac{f(a)}{g(a)} & \text{si } g(a) \neq 0 \text{ (ici y'a pas de problème)} \\ \frac{f(a)}{0} & \text{dans ce cas : } g(a) = 0 \text{ et } f(a) \neq 0 \text{ On calcule la limite à droite et à gauche de } a \\ \frac{0}{0} & \text{Ici } g(a) = 0 \text{ et } f(a) = 0, \text{ on factorise les deux fonctions par } (x-a) \text{ après on simplifié} \end{cases}$$

IMPORTANT !

♠ Exemple d'illustration :

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim_{x\to 2} \frac{2x^2-x}{5x-1}$ b) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+1}{x-1}$ c) $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3}$

♠ Solution :

1. $\lim_{x\to 2} \frac{2x^2-x}{5x-1} = \frac{2\times 2^2-2}{5\times 2-1} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ .(ici y'a pas de problème car le numérateur et de dénominateur ne s'annule pas en 2)
2. $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+1}{x-1}$ ; (ici le numérateur ne s'annule pas en 1 ($x^2+1 = 1^2+1 = 2$) et le dénominateur s'annule $x-1 = 1-1 = 0$) donc on va traiter la limite à droite et à gauche de 1.

   Pour la limite à droite : $\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2+1}{x-1} = +\infty$ (car $x > 1 \Rightarrow x-1 > 0$ et $x^2+1 = 1^2+1 = 2 > 0$).

   Pour la limite à gauche : $\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2+1}{x-1} = -\infty$ (car $x < 1 \Rightarrow x-1 < 0$ et $x^2+1 = 1^2+1 = 2 > 0$).

   Finalement : $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+1}{x-1} = \begin{cases} \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2+1}{x-1} = +\infty & \text{à droite de 1} \\ \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2+1}{x-1} = -\infty & \text{à gauche de 1} \end{cases}$
3. $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3}$ (dans ce cas le numérateur et le dénominateur s'annule en 3 ($x^2-9 = 3^2-9 = 0 et x-3 = 3-3 = 0$)) alors on factorise les deux fonction par $(x-3)$ et on simplifié :

   $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)\times 1} = \lim_{x\to 3} x+3 = 3+3 = 6$

■ **Un autre cas très important :** restant dans le cas où le numérateur et le dénominateur s'annule "$\frac{0}{0}$" mais on peut pas factoriser le numérateur ou le dénominateur , dans ce cas en utilise le **Conjugué**. prenant l'exemple suivant :

On s'intéresse à calculer la limite suivant : $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$ ; il est claire que le numérateur et le dénominateur s'annule en 1 mais **on peut pas factoriser** le numérateur par $(x-1)$ donc pour calculer cette limite on va utiliser **le Conjugué** de $\sqrt{x+3}-2$ :

$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt{x+3})^2-2^2}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \lim_{x\to 1} \frac{x+3-4}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{(\sqrt{x+3}+2)} = \frac{1}{(\sqrt{1+3}+2)} = \frac{1}{4}$

♠ en utilisant la même méthode résoudre l'exercice n°2 de la série des exercices à faire !

## Exercice n°5 de la série des exercices

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1}-x$ b) $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{5x^2+x-1}-2x+1$ c) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{4x+1}-2\sqrt{x-1}$

d) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}$ e) $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+x-1}+x$ f) $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{4x^2+x}+2x$

g) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+3}+3x}{2x-1}$

♠ Solution :

1. Calculons $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-x$ , si on remplace directement on trouve $((\sqrt{x^2+1}\Rightarrow+\infty)$ et $(x\Rightarrow+\infty)$ et $(+\infty-(+\infty))$ est une forme indéterminée) donc on peut pas calculer cette limite directement !, si on utilise le conjugué :
   $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-x = \lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{(\sqrt{x^2+1}+x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1})^2-x^2}{(\sqrt{x^2+1}+x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-x^2}{(\sqrt{x^2+1}+x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{(\sqrt{x^2+1}+x)} = 0$. (car $(\sqrt{x^2+1}\Rightarrow+\infty)$ et $(x\Rightarrow+\infty)$ et $(+\infty+(+\infty)=+\infty)$ donc $\frac{1}{(\sqrt{x^2+1}+x)}\Rightarrow 0$).
2. Calculons $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{5x^2+x-1}-2x+1$, si on remplace directement on trouve $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{5x^2+x-1} = +\infty$ (car $\lim_{x\to-\infty}5x^2+x-1=\lim_{x\to-\infty}5x^2=+\infty$ (2 est pair)) et $\lim_{x\to-\infty}-2x+1=\lim_{x\to-\infty}-2x=+\infty$ (-2 $<$ 0) , donc $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{5x^2+x-1}-2x+1=+\infty$ (car $+\infty+(+\infty)=+\infty$).
3. $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{4x+1}-2\sqrt{x-1}$ (simple utiliser le conjugué)
4. $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}$ Importante !
   Cette limite est importante car si on remplace directement on trouve une "F.I" et si on utilise le conjugué on trouve aussi une "F.I" ! dans pour résoudre cette limite suivre les étapes suivantes :
   d'abord on utilise le conjugué : $\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x} = \frac{(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x})(\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}} = \frac{(\sqrt{x+\sqrt{x}})^2-(\sqrt{x})^2}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}} = \frac{x+\sqrt{x}-x}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}$. Alors on a $\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}$ si on calcule maintenant la limite on trouve "$(\frac{+\infty}{+\infty})$" ce qui une "F.I" , donc pour lever cette indétermination on va factoriser par $\sqrt{x}$ :
   $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x(1+\frac{\sqrt{x}}{x})}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\times\sqrt{(1+\frac{\sqrt{x}}{x})}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\times[\sqrt{(1+\frac{\sqrt{x}}{x})}+1]} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{(\sqrt{(1+\frac{\sqrt{x}}{x})}+1)} = \frac{1}{2}$.
   (car $\frac{\sqrt{x}}{x}=\frac{1}{\sqrt{x}}$ donc $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0$ et $\frac{1}{(\sqrt{1+0}+1)}=\frac{1}{2}$ ).

♠ en utilisant la même méthode traiter les autres cas à faire !

Bon Courage