Prof : BOUYGUIR Taher

Classe : 1BACSHF

Calcul des limites

Année scolaire : 2024/2025

Contenue	Remarques

I. Limite finie d'une fonction numérique en un point

Propriété :

Soient P et Q deux fonctions polynômiales et $a \in IR$. Alors :

- $\lim\limits_{x\to a} P(x) = P(a)$.
- Si $Q(a) \neq 0$ alors $\lim\limits_{x\to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}$.

Exemples :

- $\lim\limits_{x\to 0} 2x - 1 =$----------
- $\lim\limits_{x\to 2} x^2 + 2x - 3 =$----------
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3x+6}{x^2+3} =$----------

Application :

1) Calculer les limites suivantes :

- $\lim\limits_{x\to 1} 4x^2 + 1 =$----------
- $\lim\limits_{x\to -1} 3x^2 + 2x - 2 =$----------
- $\lim\limits_{x\to 4} \frac{x^2-x}{x-7} =$----------

2) a) Vérifier que $2x^2 - x - 1 = 2(x-1)(x+\frac{1}{2})$.

b) Vérifier que $x^2 - 5x + 4 = (x-1)(x-4)$.

c) Calculer la limite suivante : $\lim\limits_{x\to 1} \frac{2x^2-x-1}{x^2-5x+4}$.

Exercice :

Calculer la limite suivante : $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$.

II. Limite infinie d'une fonction numérique en un point :

Propriété :

On a les Limites usuelles suivantes :

- $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x^3} = +\infty$.
- $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x^3} = -\infty$.

Exemples :

- $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{3}{x^2} =$----------
- $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{2}{x^5} =$----------
- $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{-4}{x^5} =$----------
- $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{2}{x^4} =$----------
- $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{-3}{x^3} =$----------
- $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{5x}{x-1} =$----------

✍ *Application :*

Calculer les limites suivantes :

- $\lim\limits_{x\to 4^+} \frac{3}{x-4}$ =----------

- $\lim\limits_{x\to 4^-} \frac{3}{x-4}$ = ----------

- $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \frac{x+1}{3x-6}$ = ----------

- $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \frac{x+1}{3x-6}$ = ----------

- $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{-3x+2}{1-x}$ =----------

- $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{-3x+2}{1-x}$ = ----------

III. Limite d'une fonction en $+\infty$ et $-\infty$

Propriété :

On a les Limites usuelles suivantes :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$; - $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$; - $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^3} = 0$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$; - $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = 0$; - $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^3} = 0$.

Exemples :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5}{x}$ =----------	- $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-2}{x}$ =----------
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-4}{x^3}$ =----------	- $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2}{x^4}$ =----------
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^3}{x^7}$ =----------	

Propriété :

On a les Limites usuelles suivantes :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$; - $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$; - $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$; - $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$; - $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$.

Remarques :

Soit $n \in \infty^*$ On a les limites suivantes :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = +\infty$ si n est pair.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = -\infty$ si n est impair.

Exemples :

• $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x =$----------	• $\lim\limits_{x\to-\infty} x^4 =$----------
• $\lim\limits_{x\to+\infty} -2x^2 =$----------	• $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x^3 =$----------
• $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^5 =$----------	• $\lim\limits_{x\to-\infty} -2x^5 =$----------

Propriété :

- La limite d'une fonction polynomiale en $+\infty$ ou en $-\infty$ est la limite de son monôme de plus grand degré.
- La limite d'une fonction rationnelle en $+\infty$ ou en $-\infty$ est la limite du quotient de ses monômes de plus grand degré.

Exemples :

- $\lim\limits_{x\to-\infty} 3x^2 + x^3 - 2 =$----------
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2+3x-4}{2x^3+5x^2} =$----------

Application :

Calculer les limites suivantes :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 - 5x + 3 =$ ----------
- $\lim\limits_{x\to+\infty} -4x^3 + x^2 - 5x + 3 =$ ----------
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^3+4x}{x^2+3} =$ ----------
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{6x-3}{1+2x^3} =$ ----------
- $\lim\limits_{x\to-\infty} 3x^2 + 3x + 2 =$ ----------
- $\lim\limits_{x\to+\infty} -3x^5 - x^2 - 4x + 1 =$----------
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x+3}{4x+2} =$ ----------
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-5x^2+2x}{x^3+4x-2} =$ ----------

Exercice :

1) Calculer les limites suivantes :

① $\lim\limits_{x\to-1} 5x^3 - x^2 - x + 1$;

② $\lim\limits_{x\to2} -3x^3 - 4x + 1$;

③ $\lim\limits_{x\to-1} \frac{3x^2+2}{x+2}$;

④ $\lim\limits_{x\to2} \frac{3-4x}{4x-2}$.

2) Calculer les limites suivantes :

① $\lim\limits_{x\to3^+} \frac{2x-1}{x-3}$;

② $\lim\limits_{x\to5^-} \frac{x+2}{x-5}$;

③ $\lim\limits_{x\to 1^+} -\frac{x+6}{x-1}$;

④ $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{-x-3}{x-2}$;

⑤ $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} \frac{6x-2}{2x-1}$.

3) Calculer les limites suivantes :

① $\lim\limits_{x\to+\infty} -3x^2-4+3$;

② $\lim\limits_{x\to-\infty} 4x^2+3x+2$;

③ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4x^2+3x}{2x+3}$;

④ $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^3+x^2-3$;

⑤ $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3x^2+2x}{x^3+4x-1}$;

⑥ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{6x^2+x}{3x^2+2x}$;

⑦ $\lim\limits_{x\to-\infty} -4x^3-x^2-4x+1$;

⑧ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4x^2+1}{1+x^3}$.