Limite d'une fonction numérique

I. Limite infinie et limite infinie d'une fonction au voisinage de $+\infty$

1. Limite infinie d'une fonction au voisinage de $+\infty$

☞ **Activité**

1)

a. Compléter le tableau suivant

x	10	10^4	10^{12}	10^{25}	-10^4	-10^{12}	-10^{25}
x^2							
x^3							

b. Que remarquez-vous pour x^2et x^3quand x prend des valeurs positives plus en plus grandes ?

c. Que remarquez-vous pour x^2et x^3quand x prend des valeurs négatives plus en plus petites ?

2)

a. Compléter le tableau suivant

x	10	10^4	10^{12}	10^{36}
$\sqrt{x}$				

b. Que remarquez-vous pour $\sqrt{x}$quand x prend des valeurs positives plus en plus grandes

Définition ①

Soit f une fonction numérique définie dans un voisinage de $+\infty$.

* Si $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ alors on écrit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$et se lit la limite de la fonction f si x tend vers $+\infty$ est $+\infty$.
* Si $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$ alors on écrit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{+\infty} f = -\infty$et se lit la limite de la fonction f si x tend vers $+\infty$ est $-\infty$.

Définition ②

Soit f une fonction numérique définie dans un voisinage de $-\infty$.

* Si $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $-\infty$ alors on écrit $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{-\infty} f = +\infty$et se lit la limite de la fonction f si x tend vers $-\infty$ est $+\infty$.
* Si $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers $-\infty$ alors on écrit $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$et se lit la limite de la fonction f si x tend vers $-\infty$ est $-\infty$.

Propriété

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $k \in \mathbb{R}$ on a

⊗ $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$ ⊗ $\lim\limits_{x\to-\infty} x^{2n} = +\infty$ ⊗ $\lim\limits_{x\to-\infty} x^{2n+1} = -\infty$ ⊗ $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$

$$\otimes \lim_{x\to+\infty} k.x^n = \begin{cases} +\infty & ;si \quad k>0 \\ -\infty & ;si \quad k<0 \end{cases} ; \otimes \lim_{x\to-\infty} k.x^{2n} = \begin{cases} +\infty & ;si \quad k>0 \\ -\infty & ;si \quad k<0 \end{cases} ; \otimes \lim_{x\to-\infty} k.x^{2n+1} = \begin{cases} +\infty & ;si \quad k<0 \\ -\infty & ;si \quad k>0 \end{cases}$$

Exemples :

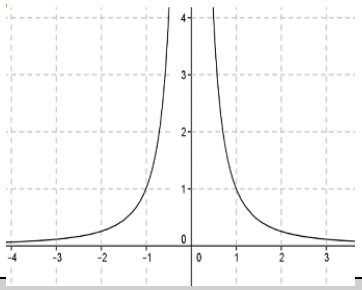
$\otimes \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$; $\otimes \lim_{x\to+\infty} x^{15} = +\infty$ $\otimes \lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ (car 2 est pair) $\otimes \lim_{x\to-\infty} x^{35} = -\infty$ (35 est impair)

$\otimes \lim_{x\to\pm\infty} 2x^2 = +\infty$; $\otimes \lim_{x\to\pm\infty} -2x^4 = +\infty$; $\otimes \lim_{x\to-\infty} 3x^{15} = -\infty$; $\otimes \lim_{x\to-\infty} -2x^{35} = +\infty$

2. Limite finie d'une fonction au voisinage de $\pm\infty$

☞Activité

La figure ci-dessous présente la représentation graphique de la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x^2}$ dans un repère orthonormé.



1) Que remarquez-vous pour les valeurs de $f(x)$ si x tend vers $+\infty$
2) Que remarquez-vous pour les valeurs de $f(x)$ si x tend vers $-\infty$
3) Peut-on conclure $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^3}$; $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^3}$; $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^4}$; $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^4}$

Propriété :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $k \in \mathbb{R}$ on a

$\otimes \lim_{x\to+\infty} \frac{k}{x^n} = 0$; $\otimes \lim_{x\to-\infty} \frac{k}{x^n} = 0$; $\otimes \lim_{x\to+\infty} \frac{k}{\sqrt{x}} = 0$

Propriété

Soit f une fonction numérique et soit $l \in \mathbb{R}$ on a :

$\otimes \lim_{x\to+\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} (f(x) - l) = 0$; $\otimes \lim_{x\to-\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x\to-\infty} (f(x) - l) = 0$

Application ①

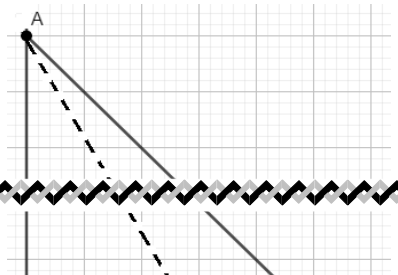
1) Montrer que $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3+x}{x^3} = 2$
2) Montrer que $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+5}{4x^2} = \frac{1}{2}$

II. Limite finie et limite infinie d'une fonction en un point

1. Limite finie d'une fonction en un point

☞Activité

Soit ABC un triangle de surface $18cm^2$ et soit $E(x)$ un point se déplace sur le segment $[BC]$.



On désigne par $f(x)$ la surface du triangle ABE

1) Que remarquez-vous si x approche plus en plus de 6.
2) Que remarquez-vous si x approche plus en plus de 0.

Définition

Soient a et l deux nombres réels

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert de forme $]a-\alpha; a+\alpha[$ sachant que $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ ou définie sur un ensemble de forme $]a-\alpha; a+\alpha[\backslash\{a\}$.

Si $f(x)$ tend vers l quand x tend vers a alors on écrit $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$

Propriété

Soit f une fonction numérique et Soient a et l deux nombres réels.

Si f admet une limite l en a alors cette limite ***est unique***.

Remarque

Pour calculer $\lim\limits_{x\to a} f(x)$; on remplace x par a :

* Si $f(a) \in \mathbb{R}$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.
* Si $f(a) = \frac{"0"}{0}$, il faut chercher des méthodes (factorisation par $(x-a)$; multiplier par le conjugué……) pour éliminer $\frac{"0"}{0}$.
* Les formes indéterminées : $\frac{"0"}{0}$; $\frac{"\infty"}{\infty}$; $"0\times\infty"$; $"+\infty-\infty"$

Application ②

Calculer les limites suivantes

$$\lim_{x\to -2}\sqrt{x^2+4} \quad ; \quad \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9} \quad ; \quad \lim_{x\to -1}\frac{x^2-2x-3}{x+1} \quad ; \quad \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x^2+2x-3} \quad ; \quad \lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{3-\sqrt{x+4}}$$

2. Limite infinie d'une fonction en un point

Définition

Soit f une fonction numérique et a un nombre réel.

* Si $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers a alors on écrit $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{a} f = +\infty$.
* Si $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers a alors on écrit $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{a} f = -\infty$.

☞Limite à gauche et limite à droite d'une fonction en un point

Définition

Soit f une fonction numérique et a un nombre réel.

* Si $f(x)$ tend vers l quand x tend vers a à droite alors on écrit $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = l$ ou $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = l$.

* Si $f(x)$ tend vers l quand x tend vers a à gauche alors on écrit $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)=l$ ou $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=l$.

Remarque

On peut définir d'une manière analogue $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)=\pm\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)=\pm\infty$

☞Limites usuelles

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ on a

$\otimes \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$; $\otimes \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty$; $\otimes \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$; $\otimes \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x^n}=+\infty$

- Si n est pair alors $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x^n}=+\infty$
- Si n est impair alors $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x^n}=-\infty$

Application ③

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x^2-2x+3}{x-1}$; $\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{x^2-3}{2-x}$; $\lim\limits_{x\to -1^+}\frac{x^3+1}{x^2+x}$; $\lim\limits_{x\to 3^-}\frac{x^2+x-1}{x-3}$; $\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{1-x}{4-2x}$.

Propriété :

Soit f une fonction numérique et a un nombre réel

- $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=l$
- $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\pm\infty$

Application ④

1) Soit f une fonction numérique définie par $\begin{cases} f(x)=-x+2; & x\geq 4\\ f(x)=x^2-2x-10; & x<4\end{cases}$

Calculer $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)$. Conclure

2) Soit g une fonction numérique définie par $\begin{cases} g(x)=1-2ax; & x\geq 2\\ g(x)=\dfrac{x^2-3x+1}{-x+3}; & x<2\end{cases}$

Déterminer le nombre réel a pour que f admet une limite en 2

III. Opérations sur les limites

Dans cette paragraphe l et l' désignent des nombres réels et a désigne un réel ou $\pm\infty$

1. Limite d'une somme

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	l	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$

$\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$F.I$	$-\infty$

2. Limite d'un produit

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	l	$l>0$	$l>0$	$l<0$	$l<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	0
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a}(f(x)\times g(x))$	$l\times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$F.I$	$F.I$

3. Limite d'un quotient

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	l	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$l'\in\mathbb{R}^*$	$+\infty$	$-\infty$	$l'>0$	$l'<0$	$l'>0$	$l'<0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$	$\frac{l}{l'}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$F.I$	$F.I$	$F.I$	$F.I$

Application ⑤

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 0} x^2+\frac{1}{x^2}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3-x$; $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+2x+4}{x}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-3x^4+x+1}{2x^2-5}$; $\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}^+}\frac{x+2}{2x-3}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x(x+1)+1}{x+1}$

IV. Limite d'une fonction polynôme – Limite d'une fonction rationnelle

Limite d'une fonction de forme $\sqrt{f}$

1. Limite d'une fonction polynôme

Propriété

Soit f une fonction polynôme et a un nombre réel.

- $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$
- La limite d'une fonction polynôme au voisinage de ∞ c'est la limite du terme le plus dominant (plus haut degré).

Exemples

⊗ $\lim\limits_{x\to 3} 4x^2+2x-5=4\times 3^2+2\times 3-5=37$.

⊗ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\sqrt{2}\right)x^3+2x^2-1=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\sqrt{2}\right)x^3=-\infty$

⊗ $\lim\limits_{x\to-\infty} 5x^2+3x-4=\lim\limits_{x\to-\infty} 5x^2=+\infty$.

Application ⑥

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty} -5x^7+4x^2-9$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\sqrt{3}+2\right)x^4+2x-1$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{2}-3}x^5+2x+$

2. Limite d'une fonction rationnelle

Propriété

Soit f une fonction rationnelle et a un nombre réel.

- Si $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \frac{P(a)}{Q(a)}$
- La limite d'une fonction rationnelle au voisinage de ∞ c'est la limite du quotient de termes les plus dominant (plus haut degré au numérateur et plus haut degré au dénominateur).

Application ⑦

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4+2x^2}{3x^3+5x^2+1}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{3}x^2-4x+1}{2x^2-1}$; $\lim\limits_{x\to 3} \frac{-2x^2+3x-5}{2x+4}$

3. Limite d'une fonction de la forme $\sqrt{f}$

Propriété :

Soit f une fonction définie sur un intervalle de forme $a;+\infty[$ $(a \in \mathbb{R})$ telle que $\forall x \in a;+\infty[; f(x) \geq 0$

- Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{f(x)} = \sqrt{l}$
- Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{f(x)} = +\infty$

Remarque :

La propriété précédente est reste valable pour x tend vers $-\infty$ ou a ou a^+ ou a^-

Application ⑧

Calculer les limites suivantes

$\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{x^2+3x+5}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{4x^3+3x^2+7}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{-3x^3+2x-1}$

V. Limites et ordre

Propriétés

Soient f, g et h définies sur un intervalle de forme $]a-\alpha; a+\alpha[$ ou $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et soit $l \in \mathbb{R}$

- Si $\begin{cases}(\forall x \in I); f(x) \leq g(x)\\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty\end{cases}$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.
- Si $\begin{cases}(\forall x \in I); g(x) \leq f(x)\\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty\end{cases}$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$
- Si $\begin{cases}(\forall x \in I); g(x) \leq f(x) \leq h(x)\\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = l\end{cases}$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$
- Si $\begin{cases}(\forall x \in I); |f(x)-l| \leq g(x)\\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0\end{cases}$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$

Remarque

Les propriétés sont valables pour x tend vers $\pm\infty$ ou x tend vers à droite ou à gauche de a

Exemple : Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+cos(x)$

On a $-1 \le cos(x) \le 1 \Rightarrow -1+x^2 \le x^2+cos(x) \le 1+x^2$

Or on a $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+1 = \lim\limits_{x\to\infty} x^2-1 = +\infty$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+cos(x) = +\infty$

Application ⑨

1) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}); \frac{1}{3} \le \frac{1}{2-sin(x)} \le 1$

2) Calculer les limites suivantes $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{2-sin(x)}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^3}{2-sin(x)}$.

VI. Limites trigonométriques

Propriété ①

Soit $a \in \mathbb{R}$ on a

$$\otimes \lim_{x\to a} cos(x) = cos(a) \quad ; \quad \otimes \lim_{x\to a} sin(x) = sin(a) \quad ; \quad \otimes \lim_{x\to a} tan(x) = tan(a) / \left(a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right)$$

Exemple

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} cos(x) = cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad ; \quad \lim_{x\to\pi} tan(x) = tan(\pi) = 0 \quad ; \quad \lim_{x\to\frac{-\pi}{6}} sin(x) = sin\left(\frac{-\pi}{6}\right) = \frac{-1}{2}$$

Remarque

Les fonction $x \mapsto cos(x)$, $x \mapsto sin(x)$ et $x \mapsto tan(x)$ n'admettent pas de limite au voisinage de $\pm\infty$

Propriété ②

$$\bullet \lim_{x\to0} \frac{sin(x)}{x} = 1 \quad ; \quad \bullet \lim_{x\to0} \frac{tan(x)}{x} = 1 \quad ; \quad \bullet \lim_{x\to0} \frac{1-cos(x)}{\frac{x^2}{2}} = 1 \quad \text{ou} \quad \bullet \lim_{x\to0} \frac{1-cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Démonstration

a. Montrer que $\bullet \lim\limits_{x\to0} \frac{sin(x)}{x} = 1$

On a $\left(\forall x \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[\right); sin(x) \le x \le tan(x)$

Donc $\frac{1}{tan(x)} \le \frac{1}{x} \le \frac{1}{sin(x)}$

Alors $\frac{cos(x}{sin(x)} \le \frac{1}{x} \le \frac{1}{sin(x)}$

Or $\left(\forall x \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[\right); sin(x) \ge 0$

D'où $cos(x) \le \frac{sin(x)}{x} \le 1$

b. Montrer que $\bullet \lim\limits_{x\to0} \frac{tan(x)}{x} = 1$

On a $\left(\forall x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right); tan(x) = \frac{sin(x)}{cos(x)}$

Donc $\frac{tan(x)}{x} = \frac{sin(x)}{x.cos(x)} = \frac{sin(x)}{x} \times \frac{1}{cos(x)}$

Puisque

Puisque $\lim\limits_{x\to 0} cos(x) = \lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$ alors $\lim\limits_{x\to 0} \frac{sin(x)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{sin(x)}{x} \times \frac{1}{cos(x)} = 1 \times 1 = 1$

Alors • $\lim\limits_{x\to 0} \frac{tan(x)}{x} = 1$

c. Montrer que • $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-cos(x)}{\frac{x^2}{2}} = 1$

On a • $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-cos(x)}{\frac{x^2}{2}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2\,sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x^2}{2}}$

On pose $X = \frac{x}{2}$ donc si $x \to 0$ alors $X \to 0$

Par conséquent $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2\,sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x^2}{2}} = \lim\limits_{X\to 0} \frac{2\,sin^2(X)}{2X^2} = \lim\limits_{X\to 0} \frac{sin^2(X)}{X^2} = \lim\limits_{X\to 0} \left(\frac{sin(X)}{X}\right)^2 = 1$

D'où $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-cos(x)}{\frac{x^2}{2}} = 1$

Résultats :

Soit $a \in \mathbb{R}^*$ on a

$\oplus \lim\limits_{x\to 0} \frac{sin(ax)}{ax} = 1$; $\oplus \lim\limits_{x\to 0} \frac{tan(ax)}{ax} = 1$; $\oplus \lim\limits_{x\to 0} \frac{1-cos(ax)}{(ax)^2} = \frac{1}{2}$; $\oplus \lim\limits_{x\to 0} \frac{1-cos(ax)}{\left(\frac{ax}{2}\right)^2} = 1$

Application ①②

Calculer les limites suivantes

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{sin(3x)}{4x}$; $\lim\limits_{x\to 0} \frac{sin(2x)}{sin(4x)}$; $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-cos(3x)}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0} \frac{tan(3x)}{sin(x)}$