Cours 6 : Limite d'une fonction

Niveau : 1ère Année Bac Sciences Expérimentales

I- Limite infinie et limite finie d'une fonction au voisinage de ±∞ 1
1) Limite infinie d'une fonction au voisinage de ±∞ 1
2) Limite finie d'une fonction au voisinage de ±∞ 2
II- Limite finie et limite infinie d'une fonction en un point 3
1) Limite finie et limite infinie d'une fonction en un point 4
2) Limite à gauche et limite à droite d'une fonction en un point 4
III- Opérations sur les limites 5
1) Limite de la somme de deux fonctions 6
2) Limite du produit de deux fonctions 6
3) Limite du quotient de deux fonctions 6
4) Les formes indéterminées 6
IV- Limite d'une fonction polynôme - Limite d'une fonction rationnelle - Limite d'une fonction de la forme $\sqrt{f}$ 7
1) Limite d'une fonction polynôme - Limite d'une fonction rationnelle 7
2) Limite d'une fonction de la forme $\sqrt{f}$ 8
V- Limites et ordre 8
VI- Limites de fonctions trigonométriques 10



Limite d'une fonction numérique

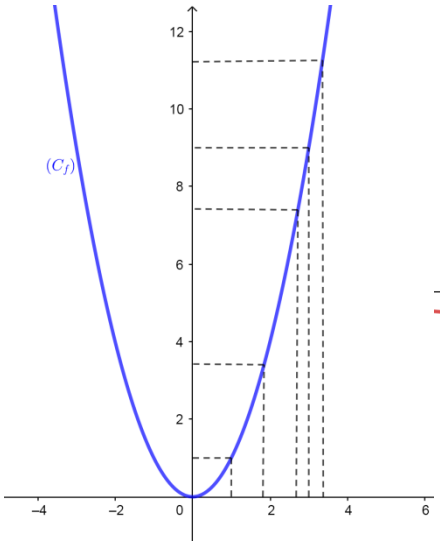
I- Limite infinie et limite finie d'une fonction au voisinage de $\pm\infty$

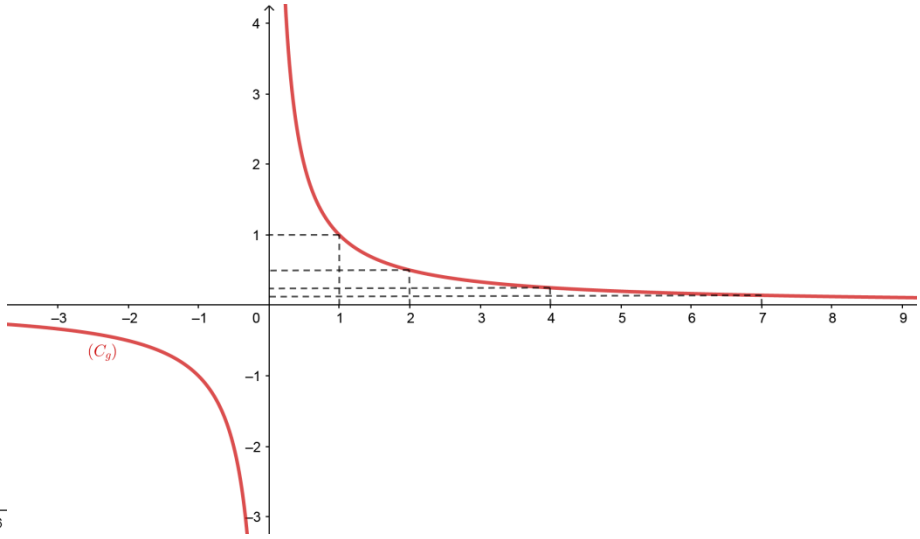
Activité :

On considère les fonctions f et g définies par : $f(x) = x^2$ et $g(x) = \frac{1}{x}$.

On s'intéresse aux valeurs prises par les fonctions f et g pour les grandes valeurs de x.

1) Ci-dessous la représentation graphique des fonctions f et g :





a. Que remarquez-vous pour $f(x)$ quand x prend des valeurs positives plus en plus grandes ?

b. Que remarquez-vous pour $g(x)$ quand x prend des valeurs positives plus en plus grandes ?

2) Compléter le tableau suivant :

x	1	13	80	200	1000	10 000	100 000	10^{20}	10^{100}
$f(x)$									
$g(x)$									

- On remarque que, si x est grand alors $f(x)$ est grand.
  On dit que : " la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$ est égale à $+\infty$ " et on note :
  $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$
- On remarque que, si x est grand alors $g(x)$ est proche de 0.
  On dit que : " la limite de $g(x)$ quand x tend vers $+\infty$ est égale à 0 " et on note :
  $$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$$

1) Limite infinie d'une fonction au voisinage de $\pm\infty$

Définition 1 :

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle de la forme $]a;+\infty[$ où $a \in \mathbb{R}$.

On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ lorsque :

« $f(x)$ devient aussi grand lorsque x devient de plus en plus grand ».

On écrit alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$.

D'une manière analogue, nous pouvons écrire une définition des limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

Propriété 1 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty \text{ si } n \text{ est pair} \\ -\infty \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$

2) Limite finie d'une fonction au voisinage de $\pm\infty$

Définition 2 :

- Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a; +\infty[$ où $a \in \mathbb{R}$.
  On dit que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers $+\infty$ lorsque :
  « $f(x)$ devient assez proche de l lorsque x est très grand ».
  On écrit alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$.
- Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]-\infty; a[$ où $a \in \mathbb{R}$.
  On dit que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers $-\infty$ lorsque :
  « $f(x)$ devient assez proche de l lorsque x prend des valeurs négatives dont la valeur absolue est de plus en plus grande ».
  On écrit alors : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$.

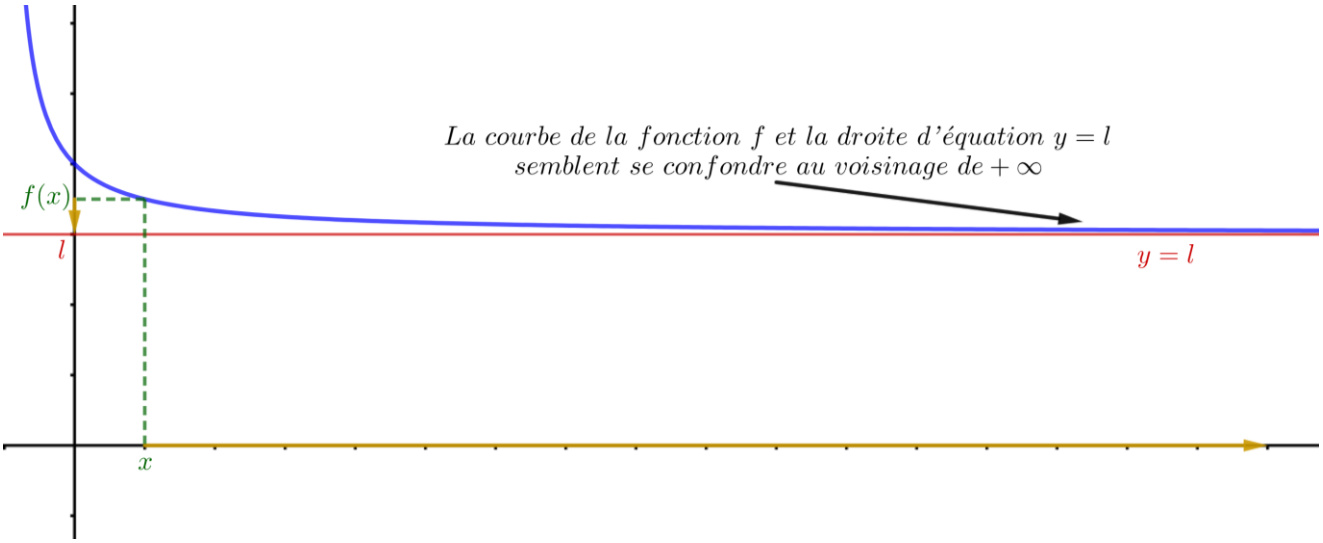
Propriété 2 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^3} = 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = 0$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^3} = 0$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

Remarques :

- Certaines fonctions n'ont pas de limite au voisinage de l'infini.
- Si f admet une limite finie l, alors la courbe de la fonction f devient « très proche » de la droite d'équation $y = l$ quand x tend vers $+\infty$.



Propriété 3 :

Soit f une fonction numérique, et l un nombre réel.

- Si f admet une limite l en $+\infty$ ou en $-\infty$, alors cette limite est unique.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$ si et seulement si $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - l) = 0$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$ si et seulement si $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x) - l) = 0$.

Application :

① Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-5\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = -5$.

② Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{7x^3+2}{2x^3} = \dfrac{7}{2}$.

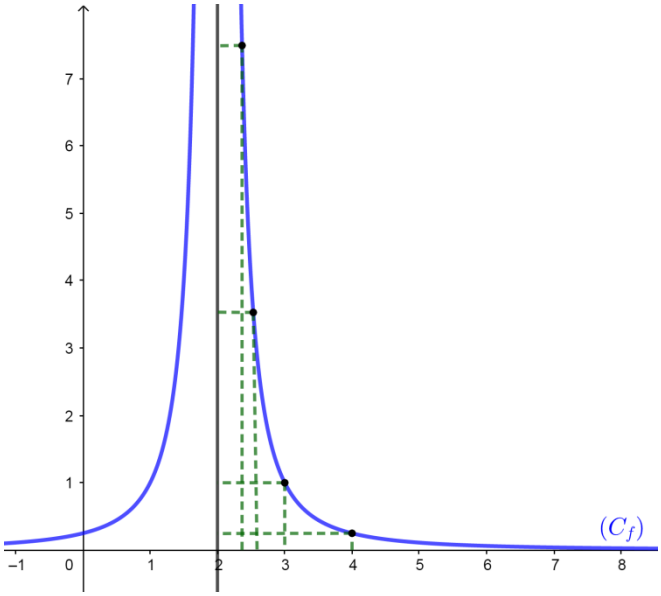
II- Limite finie et limite infinie d'une fonction en un point

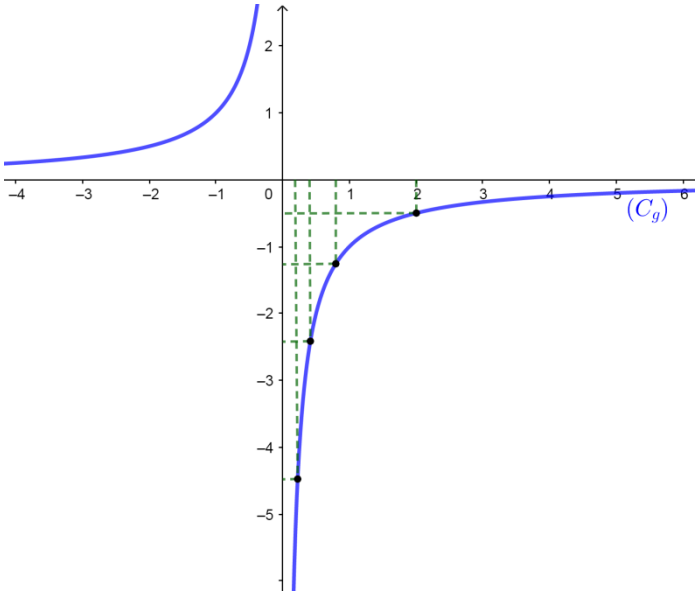
Activité :

On considère les fonctions f et g définies par : $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ et $g(x) = \frac{-1}{x}$.

On s'intéresse aux valeurs prises par les fonctions f et g pour les grandes valeurs de x.

1) Ci-dessous la représentation graphique des fonctions f et g :





a. Que remarquez-vous pour $f(x)$ quand x prend des valeurs assez proche de 2 avec $x > 2$?

b. Que remarquez-vous pour $g(x)$ quand x prend des valeurs assez proche de 0 avec $x > 0$?

2) Compléter le tableau suivant :

x	4	3	2,5	2,1	2,01	2,001	2,0001	2,00001
$f(x)$								

x	2	1	0,5	0,1	0,01	0,001	0,00001	0,0000001
$g(x)$								

- On remarque que, si x est assez proche de 2 avec $x > 2$, alors $f(x)$ tend vers $+\infty$.
  On dit que : " la limite de $f(x)$ quand x tend vers 2 à droite est égale à $+\infty$ " et on note :

$$\lim_{\substack{x\to2\\x>2}} f(x) = +\infty \text{ ou } \lim_{x\to2^+} f(x) = +\infty$$

➢ On remarque que, si x est assez proche de 0 avec $x > 0$, alors $g(x)$ tend vers $-\infty$.
On dit que : " la limite de $g(x)$ quand x tend vers 0 à droite est égale à $-\infty$ " et on note :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x) = -\infty \text{ ou } \lim_{x\to 0^+} g(x) = -\infty$$

3) Conjecturer les limites suivantes : $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} g(x)$

1) Limite finie et limite infinie d'une fonction en un point

Définition 1 :

Soit a et l deux nombres réels et f une fonction définie au voisinage de a.

➢ Si $f(x)$ tend vers l quand x tend vers a, alors on écrit : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ ou $\lim\limits_{a} f = l$.

➢ Si $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers a, alors on écrit : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{a} f = +\infty$.

➢ Si $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers a, alors on écrit : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{a} f = -\infty$.

Propriété 1 :

Si une fonction admet une limite en un point, alors cette limite est unique.

2) Limite à gauche et limite à droite d'une fonction en un point

Lorsque x tendre vers a, on distingue deux manières principales de tendre vers a :

- x tend vers a en prenant des valeurs supérieures à a, on écrit que « $x \to a^+$ » et on lit " **x tend vers a par valeurs supérieures** " ou " **x tend vers a à droite** ".
- x tend vers a en prenant des valeurs inférieures à a, on écrit que « $x \to a^-$ » et on lit " **x tend vers a par valeurs inférieures** " ou " **x tend vers a à gauche** ".

Définition 2 :

Soit f une fonction numérique. Soit a et l deux nombres réels.

- Si $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers a à droite, alors on note :

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = +\infty \text{ ou } \lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty.$$

- Si $f(x)$ tend vers l quand x tend vers a à droite, alors on note :

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = l \text{ ou } \lim_{x\to a^+} f(x) = l.$$

- D'une façon analogue on définit les limites :

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = -\infty \ ; \ \lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = +\infty \ ; \ \lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = -\infty \ ; \ \lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = l.$$

Propriété 2 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty \text{ si } n \text{ est pair} \\ -\infty \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$

Propriété 3 :

Soit a un nombre réel et f une fonction définie au voisinage de a.

➢ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l \iff \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = l.$

➢ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty \iff \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = +\infty.$

➢ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty \iff \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = -\infty.$

Remarque :

Si la limite à gauche est différente de la limite à droite, on dit que la limite n'existe pas.

Exemples :

- On a : $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \dfrac{1}{(x-2)^2} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \dfrac{1}{(x-2)^2} = +\infty$

  Donc : $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{(x-2)^2} = +\infty$.

- On a : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{-1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{-1}{x} = -\infty$

  Donc : la limite de la fonction $x \longrightarrow \frac{-1}{x}$ en 0 n'existe pas.

Application 1 :

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{5x-1}{x^2}$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{5x-1}{x^2}$; $\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x<4}} \dfrac{x}{x-4}$; $\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x>4}} \dfrac{x}{x-4}$; $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x<-2}} \dfrac{x-3}{4-x^2}$; $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x>-2}} \dfrac{x-3}{4-x^2}$

Application 2 :

Soit f la fonction numérique définie par : $\begin{cases} f(x) = x^2 + x - 5 & \text{si } x > 1 \\ f(x) = 2x^3 - 4x - 1 & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$

① Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)$.

② En déduire $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

Résumé des limites des fonctions élémentaires :

Limites en l'infini	$f(x)$	x^n	$\frac{1}{x^n}$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$
	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$	0
	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$	$+\infty$ si n pair $-\infty$ si n impair	0	non défini	non défini

Limites en 0	$f(x)$	$\frac{1}{x^n}$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$
	$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$	$+\infty$	$+\infty$
	$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$	$+\infty$ si n pair $-\infty$ si n impair	non défini

III- Opérations sur les limites

Dans ce paragraphe, f et g sont deux fonctions définies sur un même ensemble I.
l et l' sont deux réels et a représente soit un réel, ou $+\infty$, ou $-\infty$.

1) Limite de la somme de deux fonctions

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)+g(x)\big)$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	***Forme indéterminée***	***Forme indéterminée***

2) Limite du produit de deux fonctions

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	l	$l>0$	$l<0$	$l>0$	$l<0$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	l'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	0
$\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)\times g(x)\big)$	$l\times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	***F.I***	***F.I***

3) Limite du quotient de deux fonctions

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$l'\neq 0$	$\pm\infty$	$l>0$	$l<0$	$l>0$	$l<0$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\dfrac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	***F.I***	***F.I***	***F.I***	***F.I***	***F.I***

Application 1 :

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x}+5 \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}-2\right)(x^2-3) \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty}x^2-x+6$$

$$\lim_{x\to+\infty}2-(4x-5)^2 \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty}(x+4)(3x^2-1) \quad ; \quad \lim_{x\to 2}\frac{3x-1}{5+x} \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{-13}{1+x^2}$$

$$\lim_{x\to+\infty}-7x^2 \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty}-7x^2 \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty}9x^5 \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty}9x^5$$

4) Les formes indéterminées

Il existe 4 formes indéterminées, qu'on retient souvent sous la forme condensée :

$$\frac{0}{0} \quad ; \quad \frac{\infty}{\infty} \quad ; \quad 0\times\infty \quad ; \quad +\infty-\infty$$

Ce sont des formes où le résultat n'apparaît pas directement. Cela ne signifie surtout pas que la fonction n'a pas de limite.

Il convient dans ces cas-là de procéder à des transformations, d'écriture ou d'utiliser un résultat connu permettant de lever l'indétermination.

Application 2 :

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} \quad ; \quad \lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{x-3} \quad ; \quad \lim_{x\to-1}\frac{x^3-x^2+4x+6}{x^2+x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}4x^2-2x-3 \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty}x^3+5x^2-4x+1 \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-x^2+4x}{x^2+x+6}$$

IV- Limite d'une fonction polynôme - Limite d'une fonction rationnelle - Limite d'une fonction de la forme $\sqrt{f}$

1) Limite d'une fonction polynôme - Limite d'une fonction rationnelle

Rappel : Les fonctions polynômes sont les fonctions de la forme :

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \ \ avec\ a_n \neq 0$$

Alors : n est le degré du polynôme P et $a_n x^n$ est le terme de plus haut degré.

Par exemple, le polynôme $P(x) = 3x^5 + 9x^3 - 2x + 4$ est de degré 5 et son terme de plus haut degré est $3x^5$.

Propriété 1 :

- Soient P et Q deux fonctions polynômes et α un nombre réel.
  - $\lim\limits_{x\to\alpha} P(x) = P(\alpha)$
  - $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{P(\alpha)}{Q(\alpha)} \quad si \quad Q(\alpha) \neq 0.$
- Si $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ et $Q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$.
  - $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} a_n x^n$
  - $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} a_n x^n.$

La limite d'une fonction polynôme en $\pm\infty$ est égale à la limite en $\pm\infty$ du terme de plus haut degré.

- $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{a_n x^n}{b_m x^m}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{a_n x^n}{b_m x^m}.$

La limite d'une fonction rationnelle en $\pm\infty$ est égale à la limite en $\pm\infty$ du quotient des termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

Exemples :

- On a : $\lim\limits_{x\to-1}\left(-2x^3 - 5x + 4\right) = -2\times(-1)^3 - 5\times(-1) + 4 = 2 + 5 + 4 = 11.$
- On a : $\lim\limits_{x\to0}\left(3x^6 - 7x^2 - 1\right) = 3\times0^6 - 7\times0^2 - 1 = -1.$
- On a : $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{-2x^3 - 5x + 4}{3x^6 - 7x^2 - 1} = \dfrac{-2\times(-1)^3 - 5\times(-1) + 4}{3\times(-1)^6 - 7\times(-1)^2 - 1} = -\dfrac{11}{6}.$
- On a : $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{-2x^3 - 5x + 4}{3x^6 - 7x^2 - 1} = \dfrac{-2\times0^3 - 5\times0 + 4}{3\times0^6 - 7\times0^2 - 1} = -4.$
- On a : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-2x^3 - 5x + 4\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-2x^3\right) = +\infty.$
- On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x^6 - 7x^2 - 1\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x^6\right) = +\infty.$
- On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-2x^3 - 5x + 4}{3x^6 - 7x^2 - 1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-2x^3}{3x^6} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2}{3}.\dfrac{1}{x^3} = \dfrac{-2}{3}\times0 = 0.$
- On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2x^3 - 5x + 4}{3x^6 - 7x^2 - 1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2x^3}{3x^6} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2}{3}.\dfrac{1}{x^3} = 0.$

Application 1 :

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 0}(-2x^3-5x+4)$; $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^6-7x^2-1}{-2x^3-5x+4}$

$\lim\limits_{x\to +\infty}(-2x^3-5x+4)$; $\lim\limits_{x\to -\infty}(3x^6-7x^2-1)$

$\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{3x^6-7x^2-1}{-2x^3-5x+4}$; $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3x^6-7x^2-1}{-2x^3-5x+4}$

2) Limite d'une fonction de la forme $\sqrt{f}$

Propriété 2 :

Soit f une fonction **positive** et a représente soit un réel, ou $+\infty$, ou $-\infty$.

- Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$ Alors : $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{f(x)}=\sqrt{l}$.
- Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ Alors : $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{f(x)}=+\infty$.

Application 2 :

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{-2x^3-5x+4}$; $\lim\limits_{x\to -\infty}\sqrt{-2x^3-5x+4}$; $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{x^2-x-6}$

$\lim\limits_{x\to -\infty}\sqrt{\dfrac{3x-1}{5+x}}$; $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{x+2}-\sqrt{x}$; $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x-5}}{x}$

$\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{4x^2+x+1}-x$; $\lim\limits_{x\to -\infty}\sqrt{4x^2+x+1}+x$; $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{x^2+x+1}-x$

$\lim\limits_{x\to -\infty}\sqrt{x^2+x+1}+x$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$; $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x+4}-3}{x-5}$

V- Limites et ordre

Propriété 1 : (Théorèmes de comparaison)

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle de la forme $I=[a;+\infty[$.

- Si $\forall x\in I:\ f(x)\le g(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$ Alors : $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)=+\infty$.
- Si $\forall x\in I:\ f(x)\le g(x)$ et $\lim_{x\to +\infty} g(x)=-\infty$ Alors : $\lim_{x\to +\infty} f(x)=-\infty$.

Propriété 2 : (Théorème des gendarmes)

Soient f, g et h des fonctions définies sur un intervalle de la forme $I=[a;+\infty[$ et $l\in\mathbb{R}$.

- Si $\forall x\in I:\ g(x)\le f(x)\le h(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to +\infty} h(x)=l$ Alors : $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=l$.

Remarque :

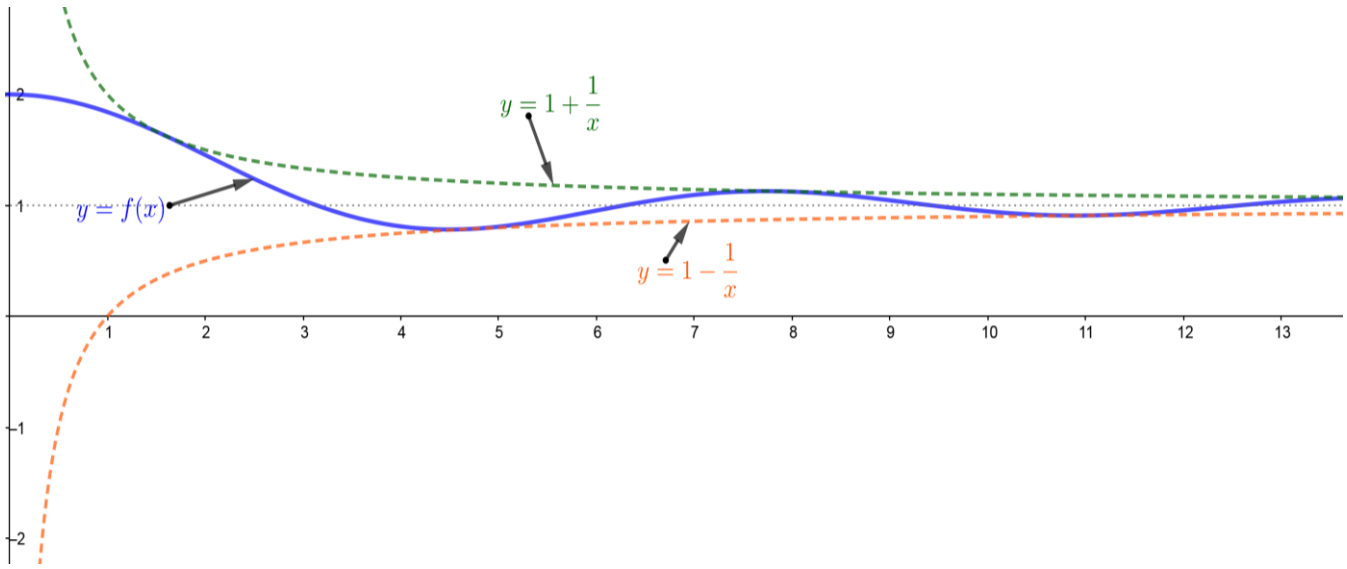
On a les mêmes propriétés quand x tend vers $-\infty$.

Exemple :

Soit f une fonction vérifiant : pour tout $x\ge 2$, $1-\dfrac{1}{x}\le f(x)\le 1+\dfrac{1}{x}$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-\dfrac{1}{x}=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\dfrac{1}{x}=1$

Alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$

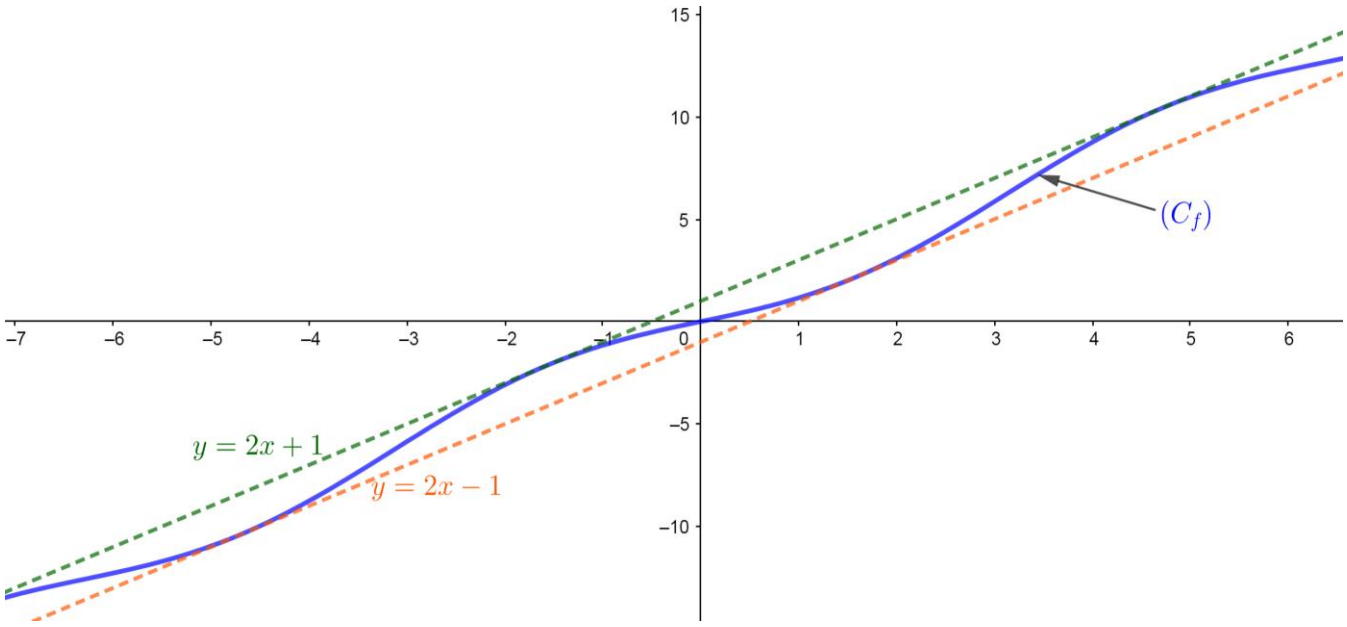


Application 1 :

Soit f la fonction définie par : $f(x)=2x-\sin x$.

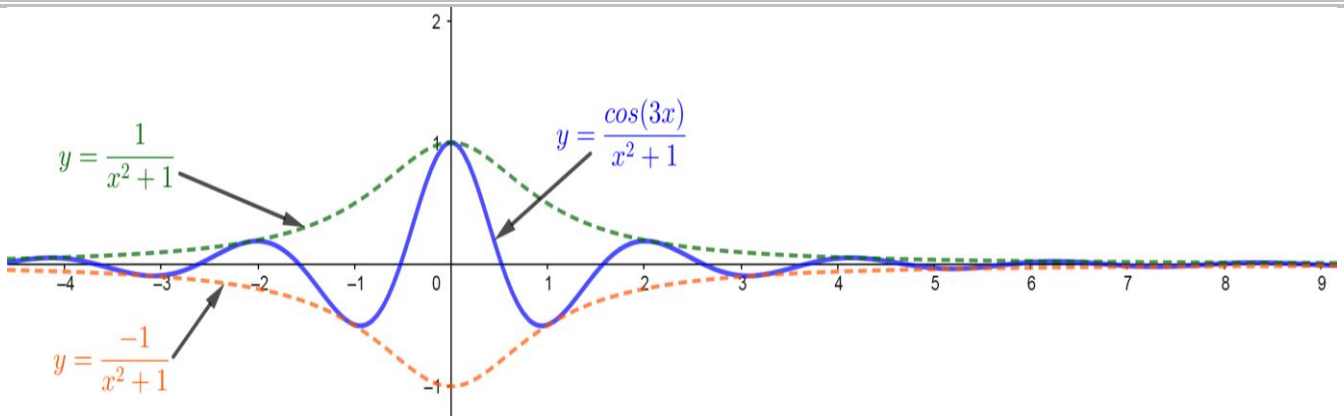
1) Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}$: $2x-1\leq f(x)\leq 2x+1$.

2) En déduire les limites de la fonction f lorsque x tend vers $+\infty$ et lorsque x tend vers $-\infty$.



Application 2 :

Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cos(3x)}{x^2+1}=0$.



VI- Limites de fonctions trigonométriques

Propriété :

Soit α un nombre réel.

- $\lim\limits_{x\to\alpha} \cos x = \cos\alpha$
- $\lim\limits_{x\to\alpha} \sin x = \sin\alpha$
- $\lim\limits_{x\to\alpha} \tan x = \tan\alpha$ si $\left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right)$.
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$.

Remarque :

Les fonctions cos, sin et tan n'admettent pas de limite en $+\infty$ et $-\infty$.

Application 1 :

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\sin x - \tan x}{x} \quad ; \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\tan x} \quad ; \quad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{3x}$$

Conséquence :

Soit a un nombre réel non nul.

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{ax} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan(ax)}{ax} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos(ax)}{(ax)^2} = \frac{1}{2}$.

Application 2 :

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(5x)}{2x} \quad ; \quad \lim_{x\to 0} \frac{\tan(6x)}{\sin(4x)} \quad ; \quad \lim_{x\to 0} \frac{\cos(3x)-1}{x^2}$$