Prof : BOUYGUIR Taher
Classe : 1BacSEG

FONCTION LOGARITHME DÉCIMAL

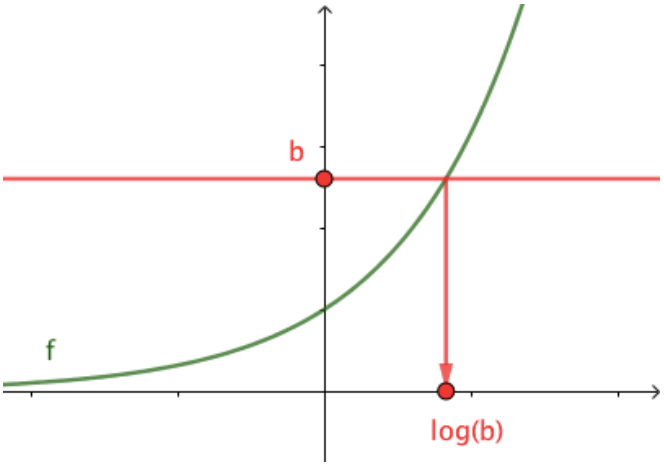
Année scolaire : 2022/2023

Contenue	Remarques

Partie 1 : Définition et propriété de la fonction logarithme décimal

1) Définition

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 10^x$.
L'équation $10^x = b$, avec $b > 0$, admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.
Cette solution se note $\log b$.

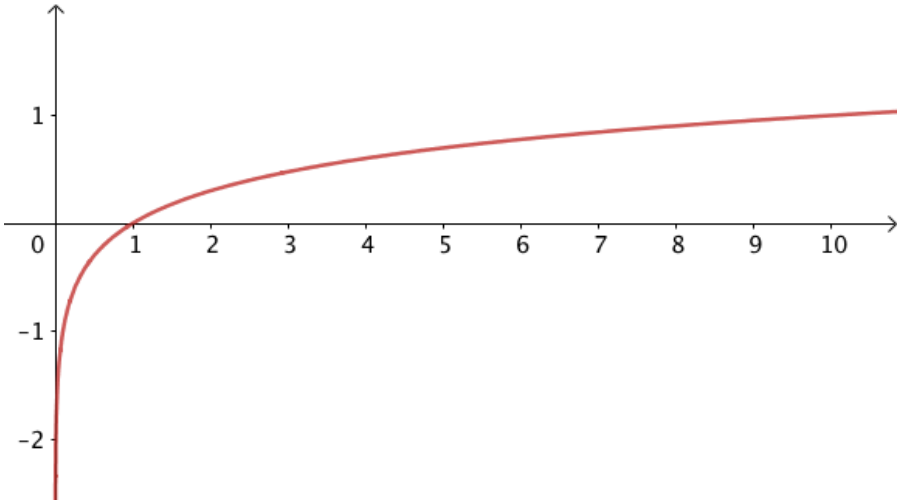


Définition : On appelle **logarithme décimal** d'un réel strictement positif b, l'unique solution de l'équation $10^x = b$. On la note $\log b$.
La **fonction logarithme décimal**, notée **log**, est la fonction :

$$\log :]0\,;\,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \log x$$

Conséquences :
a) Pour $b > 0$: $10^x = b$ revient à écrire $x = \log b$
b) $\log\left(10^x\right) = x$
c) Pour $x > 0$: $10^{\log x} = x$

2) Sens de variation



Propriété : La fonction logarithme décimal $x \longmapsto \log x$ est croissante sur $]0\,;\,+\infty[$.

Valeurs particulières : $\log(1) = 0$; $\log(10) = 1$; $\log\frac{1}{10} = -1$

Partie 2 : Propriétés de la fonction logarithme décimal

Propréités :

Soit **a** et **b** deux nombres réels strictement positifs et **n** un nombre entier naturel.

$\log(a\times b)=\log(a)+\log(b)$

$\log\left(\frac{1}{a}\right)=-\log(a)$

$\log\left(\frac{a}{b}\right)=\log(a)-\log(b)$

$\log\left(a^n\right)=n\log(a)$

$\log\left(\sqrt{a}\right)=\frac{1}{2}\log(a)$

$\log(a)=\log(b)\Leftrightarrow a=b$

$\log(a)<\log(b)\Leftrightarrow a<b$

$\log(a)>\log(b)\Leftrightarrow a>b$

Exemples :

Méthode : Simplifier une expression contenant des logarithmes

Simplifier les expressions suivantes :

$A=\log(2-\sqrt{2})+\log(2+\sqrt{2})$ $\quad$ $B=2\log 3+\log 2-4\log 3$

$C=\log 10^3-\log\frac{1}{5}$

Correction

$A=\log(2-\sqrt{2})+\log(2+\sqrt{2})$
$=\log\left((2-\sqrt{2})\times(2+\sqrt{2})\right)$
$=\log(4-2)=\log 2$

Pour $a>0$ et $b>0$:
$\log(a\times b)=\log a+\log b$

$B=2\log 3+\log 2-4\log 3$
$=\log 3^2+\log 2-\log(3^4)$

Pour $a>0$ et n entier naturel :
$\log a^n=n\log a$

$=\log(3^2\times 2)-\log(3^4)$
$=\log\frac{3^2\times 2}{3^4}$

Pour $a>0$ et $b>0$:
$\log\frac{a}{b}=\log a-\log b$

log(😅) = 💧 log(😄)

$=\log\frac{2}{9}$

$C=\log 10^3+\log\frac{1}{5}$
$=\log 10^3-\log 5$
$=3\log 10-\log 5$
$=3\times 1-\log 5$
$=3-\log 5$

Pour $b>0$:
$\log\frac{1}{b}=-\log b$

Remarque : La première formule permet de transformer un produit en somme.

Ainsi, celui qui aurait à effectuer 36 x 62, appliquerait cette formule, soit : log(36 x 62) = log(36) + log(62) ≈ 1,5563 + 1,7924 (voir table ci-contre)

L'addition étant beaucoup plus simple à effectuer que la multiplication, on trouve facilement :
log(36 x 62) ≈ 3,3487

En cherchant dans la table, le logarithme égal à 3,3487, on trouve 2232, soit : 36 x 62 = 2232.

x	*log(x)*
1	0
2	0,3010
3	0,4771
…	
34	1,5315
35	1,5441
36	1,5563
…	
62	1,7924
…	
2231	3,3485
2232	3,3487
2233	3,3489
…	

Partie 3 : Équations et inéquations

Méthode : Résoudre une équation ou une inéquation

Exemples :

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $6^x = 2$

2) Résoudre dans $]0\ ;\ +\infty[$ l'équation : $x^5 < 3$

3) 8 augmentations successives de t % correspondent à une augmentation globale de 30 %. Donner une valeur approchée du taux moyen t.

Correction

1) $6^x = 2$

$\log 6^x = \log 2$

$x \log 6 = \log 2$

$x = \dfrac{\log 2}{\log 6}$

$\log a = \log b$ revient à $a = b$

2) $x^5 < 3$

$\log(x^5) < \log 3$

$5 \log x < \log 3$

$\log x < \dfrac{1}{5} \log 3$

$\log x < \log 3^{\frac{1}{5}}$

$x < 3^{\frac{1}{5}}$

$\log a < \log b$ revient à $a < b$

L'ensemble solution est $\left]0\ ;\ 3^{\frac{1}{5}}\right[$.

Remarque : $3^{\frac{1}{5}}$ se lit *"racine cinquième de 3"* et peut se noter $\sqrt[5]{3}$.

3) Le problème revient à résoudre dans $]0\ ;\ +\infty[$ l'équation :

$\left(1 + \dfrac{t}{100}\right)^8 = 1{,}3$

$\log\left(1 + \dfrac{t}{100}\right)^8 = \log 1{,}3$

$8 \log\left(1 + \dfrac{t}{100}\right) = \log 1{,}3$

$\log\left(1 + \dfrac{t}{100}\right) = \dfrac{1}{8} \log 1{,}3$

$\log\left(1 + \dfrac{t}{100}\right) = \log\left(1{,}3^{\frac{1}{8}}\right)$

$1 + \dfrac{t}{100} = 1{,}3^{\frac{1}{8}}$

$\dfrac{t}{100} = 1{,}3^{\frac{1}{8}} - 1$

$t = 100 \times \left(1{,}3^{\frac{1}{8}} - 1\right)$

$t \approx 3{,}3$

On retrouve la propriété suivante directement établie dans le chapitre « Fonctions exponentielles » :

Si $x^n = a$ alors $x = a^{\frac{1}{n}}$

Une augmentation globale de 30 % correspond à 8 augmentations successives d'environ 3,3 %.