Logique et raisonnement

Les étapes du cours	Objectifs (durée : 8h)
I. Les propositions, les fonctions propositionnelles II. Les quantificateurs III. Opérations sur les propositions 1. La négation 2. La conjonction et disjonction 3. L'implication et l'équivalence 4. La loi de Morgan IV. Les lois logiques 1. Raisonnement par transitivité 2. Raisonnement par la contraposée 3. Raisonnement par disjonction des cas 4. Raisonnement par l'absurde 5. Raisonnement par récurrence	- Utiliser le raisonnement qui convient à la situation étudiée - Rédiger des preuves et des démonstrations mathématiques claires et correctes du point de vue logique

Le Cours	**Remarques**
I. Les propositions, les fonctions propositionnelles	
Lancement	**Durée : 20 min**

Le but de ce cours est de montrer à l'élève comment il peut raisonner correctement et mettre un ordre logique dans son raisonnement en général (comme par exemple un fait peut être vrai ou faux mais jamais les deux à la fois) et en mathématiques en particulier, car les mathématiques sont une façon de penser très ordonnée et rigoureuse, ainsi l'élève va comprendre comment montrer un théorème ou arriver à résoudre un problème en utilisant plusieurs techniques.

Activité :

Est-ce que les phrases suivantes sont vraies ou fausses :

- *3 est un nombre pair*
- $1-\sqrt{2}<0$
- *Le Maroc a une grande richesse culturelle*
- $\frac{3}{7}\in\mathbb{Q}$
- $x\in\mathbb{R}: x^2-x\geq 0$

Développement	**Durée : 15 min**

Définition :

- *Une proposition ou une assertion est un énoncé mathématique qui porte un sens vrai ou faux, on note souvent une proposition par P ou Q ou R…*
- *Une fonction propositionnelles est une propositions qui contient une ou plusieurs inconnues x, y… qui appartiennent à un ensemble déterminé, on la note P(x) ou P(x,y,..)*
- *Valeur de vérité d'une proposition :*
  - si la proposition est vraie on note V ou 1
  - si la proposition est fausse on note F ou 0

Table de vérité

La valeur de vérité de P	*sa signification*
V ou 1	*Vraie*
F ou 0	*Fausse*

Le professeur invite les élèves à donner des exemples de propositions ou fonctions propositionnelles et leur valeur de vérité

Exemple :

P ou P(x)	*sa valeur de vérité*

Evaluation	**Durée : 15 min**

Application :

Complétez le tableau suivant :

Le texte mathématique	*sa nature*	*sa valeur de vérité*
$\frac{\pi}{2} \in \mathbb{Q}$		
$\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2 = 5+2\sqrt{6}$		
$x-1<2$		
$x^2-3=0$ *pour tout x de* $[-1,1]$		

II. Les quantificateurs

Lancement	**Durée : 20 min**

Activité :

1. *Résoudre l'inéquation :* $x \in \mathbb{R} : x^2 - x \geq 0$

(On dit que pour tout x de S on a $x^2 - x \geq 0$ *et on écrit :* $\forall x \in S : x^2 - x \geq 0$*)*

2. *Donner la valeur de vérité de la fonction propositionnelle suivante :*
   $x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 = 0$

(On dit qu'il existe au moins un réel x qui vérifie : $x^2 - 1 = 0$ *et on écrit :* $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 = 0$ *)*

3. *Ajouter le quantificateur adéquat :* $x \in \mathbb{R} : x - 1 = 5$

Le professeur explique lors de la résolution de l'activité les quantificateurs universel et existentiel

Développement	**Durée : 20 min**

Définition :

Soit $x \in E : P(x)$ une fonction proportinnelle telle que E est un ensemble non vide,

- *Si pour tout x de E on a $P(x)$ est vraie on écrit : $\forall x \in E : P(x)$, le symbole $\forall$ s'appelle un quantificateur universel*
- *S'il existe au moins un élément x de E tel que $P(x)$ est vraie on écrit : $\exists x \in E : P(x)$, le symbole $\exists$ s'appelle un quantificateur existentiel*
- *S'il existe un unique élément x de E tel que $P(x)$ est vraie on écrit : $\exists ! \ x \in E : P(x)$*

Remarque :

- *si on a plusieurs quantificateurs de même nature dans une fonction propositionnelle alors leur ordre n'a pas d'importance, exemple : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : x + y^2 \geq x$ et $\forall y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} : x + y^2 \geq x$ ont la même valeur de vérité*
- *si on a plusieurs quantificateurs de nature différente dans une fonction propositionnelle alors leur ordre a de l'importance, exemple : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x + y = 5$ est vrai, tant dit que $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} : x + y = 5$ est fausse*

Evaluation	**Durée : 20 min**

Application :

1. *Ajouter le quantificateur adéquat aux assertions suivantes :*

$$P(x) : x \in \mathbb{R}_+^* : x + \frac{1}{x} \geq 2 \ ; \ Q(x) : x \in \mathbb{R} : 3 - x^2 = 2$$

2. *Donner la valeur de vérité des assertions suivantes :*

$$P'(x) : \exists x \in \mathbb{R}_+^* : x + \frac{1}{x} \geq 2 \ ; \ Q'(x) : \forall x \in \mathbb{R} : 3 - x^2 = 2$$

Conclusion :

On peut remplacer un quantificateur universel par un quantificateur existentiel mais le contraire est faux

III. Opérations sur les propositions

1. La négation

Lancement	**Durée : 15 min**

Activité :

1. *Est-ce que les assertions suivantes peuvent avoir la même valeur de vérité :*
   P: " $3^4 \leq 2^3$" et Q: "$3^4 > 2^3$" ?
2. *Donner la négation de l'assertion suivante puis préciser sa valeur de vérité R: "$l'addition\ de\ deux\ nombres\ impairs\ est\ impair$"*

Le professeur explique la négation d'une assertion et qu'il s'agit de la négation des résultats sans toucher aux données

Développement	**Durée : 15 min**

Définition :

La négation d'une proposition P est noté $\bar{P}$ ou $\urcorner P$, elle est vraie lorsque P est fausse et fausse lorsque P est vraie

Propriétés :

- *La négation de :* $\forall x \in E: P(x)$ *est* $\exists x \in E: \overline{P(x)}$
- *La négation de :* $\exists x \in E: P(x)$ *est* $\forall x \in E: \overline{P(x)}$

Exemple :

Donner la négation des assertions suivantes puis préciser leurs valeurs de vérité :

- P: "$\sqrt{17} > \sqrt{8} + \sqrt{9}$"
- Q: "$\frac{9}{4} \neq \frac{3}{2}$"
- R: "$\pi \in \mathbb{Q}$"

Evaluation	**Durée : 20 min**

Application :

On considère les assertions suivantes :

P: "$\forall x \in]0;+\infty[: \frac{1}{x} < x$" et Q: "$\forall x \in \mathbb{R}: \sqrt{x^2+1} - |x| \geq 0$"

1. *Donner la négation de P et en déduire que P est fausse*
2. *Donner la négation de Q et en déduire que Q est vraie*

2. La conjonction et disjonction

Lancement	**Durée : 20 min**

Activité :

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $\begin{cases} x+y=5 \\ 2x-y=7 \end{cases}$
2. $x^2 - x - 2 = 0$

Réponse :

1. *Le système admet une solution :* $(4,1)$, *on pose :*
   $P: (x;y) \in \mathbb{R}^2: \begin{cases} x+y=5 \\ 2x-y=7 \end{cases}$, $P_1: x = 4$ *et* $P_2: y = 1$
   On a : si $\boldsymbol{P_1}$ ***et*** $\boldsymbol{P_2}$ *sont toutes les deux vraies alors P est vraie, et si l'une des deux est fausse alors P est fausse, on dit que P est la conjonction des deux propositions* P_1 *et* P_2 *et on écrit :* $\boldsymbol{P}$: "$\boldsymbol{P_1}$ ***et*** $\boldsymbol{P_2}$"
2. *L'équation admet deux solutions :* $x_1 = -1$ *et* $x_2 = 2$, *On pose :*
   $Q: x^2 - x - 2 = 0$, $Q_1: x = -1$ *et* $Q_2: x = 2$,
   On a : si $\boldsymbol{Q_1}$ ***ou*** $\boldsymbol{Q_2}$ *est vraie alors Q est vraie, et si elles sont toutes les deux fausses alors Q est fausse, on dit que Q est la disjonction de* Q_1 *et* Q_2 *et on écrit :* $\boldsymbol{Q}$: "$\boldsymbol{Q_1}$ ***ou*** $\boldsymbol{Q_2}$"

Développement	**Durée : 20 min**

Définition :

- *La conjonction de deux propositions P et Q est notée "P ou Q" ou "$P \wedge Q$", elle est vraie si P et Q sont simultanément vraies et fausses dans les autres cas*
- *La disjonction de deux propositions P et Q est notée "P ou Q" ou "$P \vee Q$", elle est fausse si P et Q sont simultanément fausses et vraie dans les autres cas*

Table de vérité :

P	Q	P et Q	P ou Q
1	1		
1	0		
0	1		
0	0		

Exemple :

Préciser la valeur de vérité des assertions suivantes :

- $P: 4 - \pi > 0$ *et* $3^2 \geq 10$
- $Q: cos(\pi) = -1$ *ou* $cos(\pi) = \frac{1}{2}$
- $R: 1 - \frac{3}{2} < 0$ *et* $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$

Propriétés :

La conjonction et la disjonction ont les propriétés suivantes :

- *La commutativité : l'assertion "P et Q" est équivalente à "Q et P" ainsi pour "P ou Q" et "Q ou P"*
- *L'associativité : l'assertion "P et $(Q$ et $R)$" est équivalente à "$(P$ et $Q)$ et R" et l'assertion "P ou $(Q$ ou $R)$" est équivalente à "$(P$ ou $Q)$ ou R"*
- *La distributivité : l'assertion "P et $(Q$ ou $R)$" est équivalente à $(P$ et $Q)$ ou $(P$ et $R)$ de même pour les assertions : "P ou $(Q$ et $R)$" et "$(P$ ou $Q)$ et $(P$ ou $R)$"*

Le professeur donne un exemple de conjonction et disjonction de de propositions, si on vous donne une P :Pomme et une Q :Orange alors : si les deux sont bonnes alors le choix est bon, si l'une d'entre elle est pourrie alors le choix est mauvais, par contre si on vous donne le choix entre P ou Q alors vous allez choisir surement la bonne d'entre elles

Le professeur remplit le tableau de vérité avec les élèves

Evaluation	**Durée : 15 min**

Application :

Soit P une proposition,
Montrer que l'assertion $(\overline{P \text{ et } \bar{P}})$ *est vraie et que* $(\overline{P \text{ ou } \bar{P}})$ *est fausse*

3. L'implication et l'équivalence

Lancement — **Durée : 15 min**

Activité :

On considère les propositions suivantes :
P : « ABC est un triangle rectangle en A », Q : « $BC^2 = AB^2 + AC^2$ »
et R : « ABC est un triangle rectangle en A et équilatéral »

1. *On suppose que P est vraie, est ce que Q et R sont vraies ?*
2. *On suppose que R est vraie, est ce que P et R sont vraies ?*

On a : si P est vraie alors Q est vraie selon le théorème de Pythagore, on dit que P implique Q et on écrit : $P \Longrightarrow Q$, et on a aussi $Q \Longrightarrow P$ on dit que P et Q sont équivalente et on écrit : $P \Leftrightarrow Q$

Développement — **Durée : 20 min**

Définition :

- *« P implique Q » est l'assertion notée "$P \Rightarrow Q$", elle est fausse uniquement lorsque P est vraie et Q est fausse*
- *« P est équivalent à Q » est l'assertion notée "$P \Leftrightarrow Q$", on a donc une double implication : "$(P \Rightarrow Q)\ et\ (Q \Rightarrow P)$" , elle est vraie lorsque P et Q ont la même valeur de vérité*

Table de vérité :

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
1	1		
1	0		
0	1		
0	0		

Exemples :

Donner la valeur de vérité des assertions suivantes :

- P: "$\pi = \frac{22}{7} \Rightarrow \sqrt{21} < 10$"
- Q: "$-3 > -2 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} < -\frac{1}{2}$"
- R: "$\forall n \in \mathbb{N}: n + 1\ est\ impair \Leftrightarrow n\ est\ pair$"
- S: "$0 \in \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{Z} \subset \mathbb{N}$"

Exemple d'une assertion fausse impliquant une assertion vraie:

On considère les assertions suivantes : P: "$3 > 5$" *et* Q: "$3 > 2$"
On a P est fausse et Q est vraie, et on a aussi : $3 > 5 \Rightarrow 3 > 5 > 2 \Rightarrow 3 > 2$
Alors $P \Rightarrow Q$ *est vraie*

Evaluation — **Durée : 15 min**

Application :

1. *Montrer que* $(\mathrm{P} \Longrightarrow \mathrm{Q}) \Leftrightarrow (\bar{P}$ *ou* $Q)$ *puis en déduire la négation de* $\mathrm{P} \Longrightarrow \mathrm{Q}$
2. *Montrer que* $(\mathrm{P} \Longrightarrow \mathrm{Q}) \Leftrightarrow (\bar{\mathrm{Q}} \Longrightarrow \bar{P})$

4. La loi de Morgan

Lancement	**Durée : 15 min**
Activité : *On considère les propositions P et Q,* *Montrer que :* $\overline{(P\ et\ Q)} \Leftrightarrow (\bar{P}\ ou\ \bar{Q})$ *puis* $\overline{(P\ ou\ Q)} \Leftrightarrow (\bar{P}\ et\ \bar{Q})$	
Développement	**Durée : 05 min**
Définition : *On considère les propositions P et Q ,* *On définit la loi de Morgan par les relations :* $\overline{(P\ et\ Q)} \Leftrightarrow (\bar{P}$ ou $\bar{Q})$ *et* $\overline{(P\ ou\ Q)} \Leftrightarrow (\bar{P}\ et\ \bar{Q})$	
Evaluation	**Durée : 20 min**
Application : *Donner la négation des propositions suivantes :* ○ P: "$(1^2 + 2^2 = 5)\ et\ (5\ est\ premier)$" ○ Q: "$((AB)//(CD))\ ou\ (\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD})$" ○ R: "$\sqrt{7} > 3 \Rightarrow 7 \neq 3^2$" ○ S: "$\forall\ x\ \in\ \mathbb{R}, (x^2 + 1\ >\ x)\ et\ (x^2 + 1\ >\ -x)$" ○ T: "$\forall a \in \mathbb{R}, (\lvert a + 1\rvert \geq 2) \Rightarrow (a < -3)$ " ○ U: $\exists x \in \mathbb{R}, (x \in \mathbb{Q}) ou\ (\sqrt{\frac{x}{x+1}} \in \mathbb{Q})$	

IV. Les lois logiques

Définition :

Les lois logiques sont des assertions composées de plusieurs assertions à l'aide des connecteurs : ***non, et, ou,*** $\Rightarrow, \Leftrightarrow$*, qui sont vraies quelques soient les assertions qui les constitues*

1. Raisonnement par transitivité

Développement	**Durée : 10 min**
Définition : ▪ *Pour montrer que* $P \Leftrightarrow Q$ *on montre qu'une chaine d'équivalence est vraie car l'équivalence est transitive :* $P \Leftrightarrow Q_1\ et\ Q_1 \Leftrightarrow Q_2\ et\ ..Q_n \Leftrightarrow Q$ *cette loi est la base du raisonnement par les équivalences successives* ▪ *Pour montrer que* $P \Longrightarrow Q$ *on montre qu'une chaine d'implication est vraie car l'implication est transitive :* $P \Longrightarrow Q_1\ et\ Q_1 \Longrightarrow Q_2\ et\ ..Q_n \Longrightarrow Q$ *cette loi est la base du raisonnement déductif* ***Exemple :*** *On a :* $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x + 2) = 0$ *et on a :* $(x - 2)(x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 2\ ou\ x = -2$ *Alors* $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2\ ou\ x = -2$	

Evaluation	**Durée : 20 min**
Application : 1. *Montrer que* $\forall x \in [1,+\infty[: \frac{\sqrt{x-1}}{x} \leq \frac{1}{2}$ 2. *Montrer que :* $\forall x \in \mathbb{R}: \lvert x\rvert < 1 \Rightarrow \lvert 2x^2 - x - 1\rvert < 2$	

2. Raisonnement par la contraposée

Développement	**Durée : 15 min**
Définition : *Pour montrer que* $P \Longrightarrow Q$ *on peut montrer que* $\bar{Q} \Longrightarrow \bar{P}$*, cette loi s'appelle le raisonnement par la contraposée* ***Remarque :*** *On utilise ce raisonnement quand il est difficile de prouver directement l'assertion :* $P \Longrightarrow Q$ ***Exemple :*** *Montrer que* $\forall n \in \mathbb{N}: n^2 est\ pair \Rightarrow n\ est\ pair$	

Evaluation	**Durée : 15 min**
Application : *Montrer que :* ○ P: "$\forall\ x \in \mathbb{R}^+: x \neq 4 \Rightarrow \sqrt{x} - 1 \neq 1$" ○ Q: "$\forall\ x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} : x \neq 5 \Rightarrow \frac{x+3}{x-1} \neq 2$"	

3. Raisonnement par disjonction des cas

Lancement	**Durée : 10 min**
Activité : *Montrer que :* $\forall n \in \mathbb{N} : \frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{N}$	

Développement	**Durée : 05 min**
Définition : *Lorsqu'on utilise plusieurs cas dans une démonstration ce raisonnement s'appelle : le raisonnement par disjonction des cas*	

Evaluation	**Durée : 10 min**
Application : *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *l'inéquation :* $\lvert x^2 - 4x\rvert - x^2 > 0$	

4. Raisonnement par l'absurde

Développement	**Durée : 15 min**
Définition : *Pour montrer qu'une proposition P est vraie, on suppose qu'elle est fausse et on doit trouver une contradiction logique* *Par exemple : on a P est vraie, on veut démontrer la proposition* $P \Rightarrow Q$ *on suppose que* Q *est fausse, alors* $\bar{Q}$ *est vraie, d'autre part on a :* $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\bar{Q} \Rightarrow \bar{P})$ *alors* $\bar{P}$ *est vraie :* ***absurde*** *car P est vraie, d'où notre supposition est fausse, alors* Q *est vraie* ***Exemple :*** *Montrer que :* $\forall n \in \mathbb{N}: n^2$ *impair* $\Rightarrow n$ *impair* *On suppose que* n^2 *est impair, on veut montrer que n est impair,* *On suppose que n est pair, on a :* n *pair* $\Rightarrow n = 2k\ ; k \in \mathbb{N} \Rightarrow n^2 = 4k^2; k \in \mathbb{N} \Rightarrow n^2$ *pair c'est absurde car n² est impair, d'où notre supposition est fausse et ainsi on a :* n^2 *impair* $\Rightarrow$ n *impair*	*Le professeur fait remarquer aux élèves qu'on avait déjà résolu cet exemple avec le raisonnement par contraposée*
Evaluation	**Durée : 20 min**
Application : 1. *Soient* $a; b \in \mathbb{Z}$ *tels que :* $a + \sqrt{2}b = 0$ *, monter que* $a = b = 0$ 2. *Soient* $x; y; z \in \mathbb{R}$ *tels que :* $x + y < z$*, montrer que* $x < \frac{z}{2}$ *ou* $y < \frac{z}{2}$	

5. Raisonnement par récurrence

Lancement	**Durée : 20 min**
Activité : *On cherche à montrer que* $\forall\, n \in \mathbb{N} : 2^n \geq n$ *On pose :* $P(n) : 2^n \geq n$ *pour* $n \in \mathbb{N}$ 1. *Montrer que* $P(0)$ *est vraie* 2. *Montrer que :* $\forall\, k \in \mathbb{N}^* : 2k \geq k + 1$ 3. *On suppose que* $P(n)$ *est vraie pour un n donné, Montrer que* $P(n+1)$ *est vraie* 4. *En déduire* $\forall\, n \in \mathbb{N} : 2^n \geq n$	*Le professeur explique le principe de la récurrence et indique que pour montrer P(n+1) il faut fixer une partie et développer l'autre :* $2^n \geq n \Leftrightarrow 2^n + 1 \geq n + 1$ *ou:* $2^n \geq n \Leftrightarrow 2 \times 2^n \geq 2n$
Développement	**Durée : 05 min**
Propriété : *On considère l'assertion : «* $\forall n \geq n_0 : P(n)$ *»* *Le raisonnement par récurrence se déroule en trois étapes :* i. *L'initialisation : on vérifie que* $P(n_0)$ *est vraie* ii. *L'hérédité : On suppose que P(n) est vraie pour un n donné, et on montre que P(n+1) est vraie* iii. *La conclusion : par le principe de récurrence on a* $\forall n \geq n_0 : P(n)$	*Le professeur explique qu'on ne peut utiliser ce raisonnement qu'en cas où on a l'inconnue est un entier naturel*

Evaluation	**Durée : 20 min**
Application : 1. *Montrer que :* $\forall\, n \in \mathbb{N} : 3^n \geq 2n+1$ 2. *Montrer que :* $\forall n \in \mathbb{N}^* : 1+3+5+\cdots+(2n+1) = (n+1)^2$	

Le professeur propose un résumé sous forme de carte mentale pour faciliter la retenue du cours, il l'a fait comme une activité collective avec les élèves sur le tableau qu'ils copient ensuite dans leurs cahiers dans une page séparée :

LOGIQUE ET RAISONNEMENT

Opération sur les propositions :

- La négation : $\overline{\forall x \in E : P(x)} \Leftrightarrow \exists x \in E : \overline{P(x)}$
  $\overline{\exists x \in E : P(x)} \Leftrightarrow \forall x \in E : \overline{P(x)}$
- La conjonction : $(P \text{ et } Q)$ *vraie* $\Leftrightarrow P$ *vraie et* Q *vraie*
- La disjonction : $(P \text{ ou } Q)$ *fausse* $\Leftrightarrow P$ *fausse et* Q *fausse*
- L'implication : $(P \Rightarrow Q)$ *fausse* $\Leftrightarrow P$ *vraie et* Q *fausse*
  $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\bar{P} \text{ ou } Q)$
- L'équivalence : $(P \Leftrightarrow Q)$*vraie* $\Leftrightarrow P$ *et* Q *ont la même valeur de vérité*
- Loi de Morgan : $\overline{(P \text{ et } Q)} \Leftrightarrow (\bar{P} \text{ ou } \bar{Q})$ *et* $\overline{(P \text{ ou } Q)} \Leftrightarrow (\bar{P} \text{ et } \bar{Q})$

Lois logiques :

- Raisonnement par transitivité :
  $P \Leftrightarrow Q_1$ *et* $Q_1 \Leftrightarrow Q_2$ *et* $..Q_n \Leftrightarrow Q$ *et* $P \Leftrightarrow Q_1$ *et* $Q_1 \Leftrightarrow Q_2$ *et* $..Q_n \Leftrightarrow Q$
- Raisonnement par la contraposée : $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\bar{Q} \Rightarrow \bar{P})$
- Raisonnement par disjonction des cas
- Raisonnement par l'absurde : supposer le contraire de ce qu'on veut démontrer et trouver une absurdité
- Raisonnement par récurrence :
  L'initialisation : montrer que $P(n_0)$ est vraie
  L'hérédité : supposer que $P(n)$ est vraie pour n donné, et montrer $P(n+1)$
  La conclusion : par le principe de récurrence on a : $\forall n \geq n_0 : P(n)$