**Prof :** BOUYGUIR Taher
**Classe :** 1BACSHF

# *Notions en logique*

**Année scolaire :** 2024/2025

| Contenue | Remarques |
|---|---|

## *I. La proposition :*

### *Activité ①:*

Mettre une croix (×) dans la case qui convient.

| Textes mathématiques | Vrai | Faux | On ne peut pas décider sa vérité |
|---|---|---|---|
| ➢ "$10 \times 2 + 15 = 35$" | | | |
| ➢ $15 \times 2$ | | | |
| ➢ $-4 \geq 12$ | | | |
| ➢ "$\sqrt{9} = 3$" | | | |
| ➢ "7 est un nombre pair" | | | |
| ➢ "$\sqrt{16+9} = \sqrt{16} + \sqrt{9}$" | | | |

### *Définition :*

Une proposition est un texte mathématique qui a un sens pouvant être vrai ou faux mais pas les deux en même temps.
On note souvent une proposition par les lettres P, Q ou R ...

### *Exemples :*

- "$4 > 3$ ": Proposition vraie.
- "$2 + 2 = 5$ " : Proposition fausse.
- " Tout carré est un rectangle " :Proposition vraie.

### *Définition :*

Une fonction propositionnelle est un texte mathématique qui comprend une ou plusieurs variables et qui est vrai pour certaines valeurs attribuées à ces variables et faux dans les autres cas.

### *Exemples :*

- $P(x)$: "$x \in \mathbb{R}, x > 5$": Fonction propositionnelle vraie pour $x = 10$ et fausse pour $x = 2$.
- $B(x, y)$ : "$x - y = 4$": Fonction propositionnelle. On a : $B(6,2)$ : "$6 - 2 = 4$" proposition vraie et $B(8,2)$ : "$8 - 2 = 4$" proposition fausse.

## *II. Les quantificateurs :*

### 1. Quantificateur universel :

### *Définition :*

Soit $P(x)$ une fonction propositionnelle tel que $x$ est un élément d'un ensemble $E$.
Si $P(x)$ est vraie pour tout élément de $E$ on écrit : $(\forall x \in E): P(x)$.

- Le symbole "$\forall$" s'appelle ***quantificateur universel*** et il se lit : ***pour tout*** ou ***quel que soit***.

### *Exemples :*

- $(\forall x \in \mathbb{R}): x^2 \geq 0$ : Proposition vraie.
- $(\forall x \in \mathbb{R}): x^2 \geq x$ : Proposition fausse.
- $(\forall x \in \mathbb{R})\ (\forall y \in \mathbb{R}): x + y = 2$ : Proposition fausse.

### 2. Quantificateur existentiel :

### *Définition :*

Soit $P(x)$ une fonction propositionnelle tel que $x$ est un élément d'un ensemble $E$.
S'il existe au moins un élément de $E$ pour lequel $P(x)$ est vraie on écrit :
$(\exists x \in E): P(x)$.

- Le symbole "$\exists$" s'appelle ***quantificateur existentiel*** et il se lit : ***il existe au moins***.

### *Exemples :*

- $(\exists x \in \mathbb{R}): x^3 = 8$ : Proposition vraie.
- $(\exists x \in \mathbb{R}): x^2 = -2$ : Proposition fausse.

### *Application ①:*

Ecrire les propositions suivantes à l'aide des quantificateurs :

- $P_1$ : "Quel que soit $n$ un entier naturel : $n \geq 0$".
- $P_2$ : "Pour tout $x$ de $[2; +\infty[$ : $x - 2 \geq 0$".
- $P_3$ : "Il existe au moins deux nombres réel $a$ et $b$ tels que :$a \times b = 4$".
- $P_4$ : "Il existe au moins un élément $x$ de $\mathbb{Z}$ tel que :$x^2 - x = 0$".

## *III. OPERATIONS SUR LES PROPOSITIONS :*

### 1. La négation d'une proposition :

#### *Définition :*

La négation d'une proposition $P$, noté $\bar{P}$ ou $\neg P$, est la proposition qui vraie si $P$ est fausse et qui est fausse si $P$ est vraie.

| $P$ | $\bar{P}$ | **Ce tableau est appelé le tableau de vérité de la négation** |
|---|---|---|
| 0 | 1 | |
| 1 | 0 | |

#### *Exemples :*

| **La proposition $P$** | | **La négation $\bar{P}$** | |
|---|---|---|---|
| • $3 > 2$ | **V** | • $3 \leq 2$ | **F** |
| • $(-2)^2 = -4$ | **F** | • $(-2)^2 \neq -4$ | **V** |
| • $-3 \in \mathbb{N}$ | **F** | • $-3 \notin \mathbb{N}$ | **V** |

#### *Propriété :*

- La négation de la proposition : " $(\forall x \in E): P(x)$ " est : " $(\exists x \in E): \bar{P}(x)$" .
- La négation de la proposition : " $(\exists x \in E): P(x)$ " est : " $(\forall x \in E): \bar{P}(x)$" .
- La négation de la proposition : " $(\forall x \in E)(\exists y \in E): P(x, y)$ " est : " $(\exists x \in E)(\forall y \in E): \bar{P}(x, y)$" .
- La négation de la proposition : " $(\exists x \in E)(\forall y \in E): P(x, y)$ " est : " $(\forall x \in E)(\exists y \in E): \bar{P}(x, y)$" .

#### *Remarque :*

| **Le symbole** | $>$ | $<$ | $\geq$ | $\leq$ | $=$ | $\in$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Sa négation** | $\leq$ | $\geq$ | $\prec$ | $\succ$ | $\neq$ | $\notin$ |

#### *Exemples :*

| **La proposition $P$** | **La négation $\bar{P}$** |
|---|---|
| • $(\forall x \in \mathbb{R}): x \geq 1$ | • $(\exists x \in \mathbb{R}): x < 1$ |
| • $(\exists n \in \mathbb{N}): \sqrt{n} \in \mathbb{N}$ | • $(\forall n \in \mathbb{N}): \sqrt{n} \notin \mathbb{N}$ |
| • $(\forall x \in \mathbb{R}): x^2 + x + 1 \geq 0$ | • $(\exists x \in \mathbb{R}): x^2 + x + 1 < 0$ |
| • $(\forall n \in \mathbb{N})\ (\exists m \in \mathbb{N}): m \geq n$ | • $(\exists n \in \mathbb{N})\ (\forall m \in \mathbb{N}): m < n$ |

### 2. La disjonction

#### *Définition :*

La disjonction de deux propositions $P$ et $Q$ est la proposition qui est vraie si au moins l'une des deux propositions est vraie on la note ***P ou Q*** ou $P \vee Q$.

**Tableau de vérité de *P ou Q*** :

| $P$ | $Q$ | $P$ ou $Q$ |
|---|---|---|
| *V* | *V* | *V* |
| *V* | *F* | *V* |
| *F* | *V* | *V* |
| *F* | *F* | *F* |

#### *Exemples :*

- La proposition : $(-5 \geq 2)$ ou $(5 \geq 2)$ est vraie.

- La proposition : $(3+2=6)$ ou $(-3\geq 1)$ est fausse.
- La proposition : $(-5\in\mathbb{R})$ ou ( 3 divise 12 ) est vraie.

### 3. La conjonction

*Définition :*

La conjonction de deux propositions $P$ et $Q$ est la proposition qui est vraie uniquement si les deux propositions $P$ et $Q$ sont vraies en même temps on la note : $\boldsymbol{P}$ ***et*** $\boldsymbol{Q}$ ou $\boldsymbol{P\wedge Q}$.

**Tableau de vérité de ($\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{Q}$) :**

| $P$ | $Q$ | $P$ et $Q$ |
|---|---|---|
| *V* | *V* | *V* |
| *V* | *F* | *F* |
| *F* | *V* | *F* |
| *F* | *F* | *F* |

*Exemples :*

- La proposition : $(-5\geq 2)$ et $(5\geq 2)$ est fausse.
- La proposition : $(3+2=6)$ et $(-3\geq 1)$ est fausse.
- La proposition : $(-5\in\mathbb{R})$ et ( 3 divise 12 ) est vraie.

*Application ②:*

Déterminer la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes :

- $P_1$ : $(3$ est impair$)$ et $(3=5)$.
- $P_2$ : $(4\times 8=20)$ ou $(10$ est pair$)$.
- $P_3$ : $(9-3=6)$ et $(-1\in\mathbb{Z})$.
- $P_4$ : $(-4\in\mathbb{N})$ ou $(\forall x\in\mathbb{R}: x^2+1>0)$.

*Remarque :*

Soient P et Q deux propositions.

- La négation de (P et Q) et ($\overline{\text{P}}$ ou $\overline{\text{Q}}$).
- La négation de (P ou Q) et ($\overline{\text{P}}$ et $\overline{\text{Q}}$).

*Exemples :*

- La négation de « $(0\geq 2)$ et $(1+5=3)$» est : « $(0<2)$ ou $(1+5\neq 3)$ ».
- La négation de « $(5\in\mathbb{N})$ ou $(\forall x\in\mathbb{R}: x^2>0)$» est : « $(5\notin\mathbb{N})$ et $(\exists x\in\mathbb{R}\ x^2\leq 0)$ ».

### 4. L'implication

*Définition :*

L'implication de deux propositions P et Q est la proposition qui est fausse seulement dans le cas P est vraie et Q est fausse. On la note par $P\Rightarrow Q$ et se lit : $P$ implique $Q$.

**Tableau de vérité de $P\Rightarrow Q$ :**

| $P$ | $Q$ | $P\Rightarrow Q$ |
|---|---|---|
| *V* | *V* | *V* |
| *V* | *F* | *F* |
| *F* | *V* | *V* |
| *F* | *F* | *V* |

*Exemples :*

- La proposition : $2>1\ \Rightarrow\ 2+3=-1$ est fausse.
- La proposition : $3\times 2=9\Rightarrow 5-1=20$ est vraie.
- La proposition : $(3^2=9)\Rightarrow 4-1=3$ est vraie.
- La proposition : $2<0\ \Rightarrow\ 2+3=5$ est vraie.

*Remarque :*

- P $\Rightarrow$ Q signifie : si P est vraie alors Q est vraie.
- L'implication Q $\Rightarrow$ P est appelé l'implication réciproque de l'implication P $\Rightarrow$ Q.
- Les propositions $P\Rightarrow Q$ et $(\bar{P}$ou $Q)$ ont la même valeur de vérité.

*Exemple :*

" $x = 2 \Rightarrow x^2$=4" signifie : "si $x = 2$, alors $x^2$= 4 " et c'est une proposition vraie.

### ✍ *Application ③:*

Montrer que : $2 \leq x \leq 3 \quad \Rightarrow \quad 3 \leq 2x - 1 \leq 5$ .

### 5. L'équivalence

### *Définition :*

L'équivalence de deux propositions $P$ et $Q$ est la proposition ( P ⇒ Q $et$ Q ⇒ P) qu'on note par $P \Leftrightarrow Q$ et se lit « $P$ est équivalente à $Q$ » ou bien « $P$ si et seulement si $Q$ ».

- $P \Leftrightarrow Q$ est vraie seulement si $P$ et $Q$ ont même valeur de vérité.

**Tableau de vérité de** $P \Leftrightarrow Q$ :

| ***P*** | ***Q*** | $P \Leftrightarrow Q$ |
|---|---|---|
| ***V*** | ***V*** | ***V*** |
| ***V*** | ***F*** | ***F*** |
| ***F*** | ***V*** | ***F*** |
| ***F*** | ***F*** | ***V*** |

### *Exemple :*

*Soient a et b deux nombres réels. On a :*

$$ab = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ou } b = 0.$$

### ✍ *Application ④:*

Déterminer la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes :

- $P_1$ : 3 est impair ⇔ $3 = 5$.
- $P_2$ : $4 \times 8 = 20 \Leftrightarrow 10$ est pair.
- $P_3$ : $-1 \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 9 - 3 = 6$.
- $P_4$ : $-4 \in \mathbb{N} \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R})$: $x^2 + 1 \succ 0$.

## *IV. Les raisonnements mathématiques :*

### 1. Raisonnement par équivalence :

### *Exemples :*

Montrons que :$(\forall x \in \mathbb{R})$: $3x - 9 = -4x + 5 \Leftrightarrow x = 2$.

Montrons que :$(\forall a \in \mathbb{R})(\forall b \in \mathbb{R})$: $a^2 + b^2 = 2ab \Leftrightarrow a = b$.

### 2. Raisonnement par disjonction des cas :

### *Exemple :*

Résoudrons dans $\mathbb{R}$ l'équation :$|x| + 5 = 3x$.

### 3. Raisonnement par l'absurde :

### *Exemple :*

Montrons que 0 n'a pas d'inverse dans $\mathbb{R}$ .