Notions de logique

I- Définitions

1) Proposition

Définition 1

On appelle une ***proposition*** ou une ***assertion*** tout énoncé qui a un sens pouvant être vrai ou faux (mais pas les deux en même temps).

On note souvent une proposition par les lettres P , Q ou R . . .

Valeur de vérité d'une proposition :

Une proposition a deux valeurs de vérité : soit « vraie » soit « fausse ».

- Si la proposition est vraie on note **V** ou **1**.
- Si la proposition est fausse on note **F** ou **0**.
- On représente ces deux valeurs dans la table ci-contre, appelée table de vérité de la proposition P

P
V
F

ou

P
1
0

Exemples :

- « $2+9$ » n'est pas une proposition.
- P : « 2 est un nombre pair » est une proposition vraie.
- Q : « $2+5=8$ » est une proposition fausse.

2) Fonction propositionnelle

Définition 2

On appelle ***fonction propositionnelle*** (ou ***prédicat***) tout énoncé mathématique contenant des variables et qui devient une proposition toutes les fois qu'on y substitue à toutes les variables des valeurs bien déterminées.

On note souvent une fonction propositionnelle par : $P(x)$ ou $P(x;y)$ . . .

Exemples :

- $P(x)$: « $\sqrt{x^2} = x$ où $x \in \mathbb{R}$ » est une fonction propositionnelle.
  - si $x = 5$ on obtient une proposition vraie.
  - si $x = -2$ on obtient une proposition fausse.
- $P(x;y)$: « $x + y < 0$ où $x;y \in \mathbb{R}$ » est une fonction propositionnelle.
  - si $x = 5$ et $y = -7$ on obtient une proposition vraie.
  - si $x = 2$ et $y = 8$ on obtient une proposition fausse.

3) les quantificateurs

Définition 3

➢ *Quantificateur universel* :

On note l'expression suivante « pour tout x de E la proposition $P(x)$ est vraie » par « $\forall x \in E: P(x)$ ».

Le symbole $\forall$ s'appelle quantificateur universel et il se lit :

pour tout x *appartenant à* E, $P(x)$; ou *quel que soit* x *appartenant à* E, $P(x)$

➢ ***Quantificateur existentiel*** :

On note l'expression suivante « il existe un x de E la proposition $P(x)$ est vraie » par « $\exists x \in E: P(x)$ ».

Le symbole $\exists$ s'appelle quantificateur existentiel et il se lit :

il existe x *appartenant à* E *tel que* $P(x)$ (soit vraie)

L'expression suivante « ***il existe un unique*** x de E la proposition $P(x)$ est vraie » est notée : « $\exists! x \in E: P(x)$ ».

Exemples :

- « $\forall x \in \mathbb{R}: x^2 \geq 1$ » est une proposition fausse.
- « $\forall x \in [1; +\infty[: x^2 \geq 1$ » est une proposition vraie.
- « $\exists x \in \mathbb{R}: x(x-1) < 0$ » est vraie (par exemple $x = \frac{1}{2}$ vérifie bien la propriété).
- « $\exists x \in \mathbb{R}: x^2 = -1$ » est fausse (aucun réel au carré ne donnera un nombre négatif).
- « $\exists! x \in \mathbb{R}: x^2 - 6x + 9 = 0$ » est vraie (car $\Delta = 0$).
- « $\exists! x \in \mathbb{R}: 7x^2 + 5x - 2 = 0$ » est fausse (car $\Delta > 0$).
- « $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}): |x+y| \leq |x| + |y|$ » est vraie.
- « $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}): y^2 = x$ » est fausse.

Remarque : L'ordre des quantificateurs non identiques est très important.

- L'ordre des quantificateurs identiques (universel ou bien existentiel) ne change pas le sens de la fonction propositionnelle.
- L'ordre des quantificateurs non identiques (universel et existentiel) change le sens de la fonction propositionnelle.

Exercice 1

Déterminer la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes :

1) " $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$ "

2) " $\exists! n \in \mathbb{R} : (n-1)(n-3) = 0$ "

3) " $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1$ "

4) " $\exists x \in \mathbb{R} : cos(x) \geq 1$ "

5) " $\forall n \in \mathbb{Z} : \frac{n}{4} \in \mathbb{Z}$ "

6) " $(\exists x \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R}): y^2 = x$ "

7) " $(\forall x \in \mathbb{Z})(\exists y \in \mathbb{Z}): x + y = 0$ "

8) " $(\exists x \in \mathbb{Z})(\forall y \in \mathbb{Z}): x + y = 0$ "

II- Les opérations sur les propositions

1) La négation d'une proposition

Définition 4

La ***négation*** d'une proposition P est la proposition qui est vraie si P est fausse; et qui est fausse si P est vraie, et on la note : $\overline{P}$.

La table de vérité de la négation :

On peut représenter la négation d'une proposition par la table ci-contre

P	$\overline{P}$
1	
0	

Remarques :

- La négation de la proposition « $\exists x \in E: \boldsymbol{P}(x)$ » est la proposition « $\forall x \in E: \overline{\boldsymbol{P}(x)}$ ».
- La négation de la proposition « $\forall x \in E: \boldsymbol{P}(x)$ » est la proposition « $\exists x \in E: \overline{\boldsymbol{P}(x)}$ ».

Exemples :

La proposition $\boldsymbol{P}$	sa négation : $\overline{\boldsymbol{P}}$
$\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$	
$7 + 1 = 8$	
$3 \geq 2$	
$7 - 3 < 4$	
$\exists\, x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 = 0$	
$\forall\, x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2} = x$	
" *Toutes les boules contenues dans l'urne sont rouges* "	
$(\forall\, x \in \mathbb{R})(\exists\, p \in \mathbb{Z}) : p \leq x$	

Conséquence :

Pour montrer que la proposition « $\forall x \in E: \boldsymbol{P}(x)$ » est fausse, il suffit de monter que sa négation « $\exists x \in E: \overline{\boldsymbol{P}(x)}$ » est vraie.

Ce type de raisonnement est appelée ***raisonnement par contre-exemple***.

Exercice 2

En utilisant un raisonnement par contre-exemple, montrer que les propositions suivantes sont fausses :

$\boldsymbol{P}$: $\forall\, x \in \mathbb{R}\,;\ x^2 - 5x - 6 \neq 0$ et $\boldsymbol{Q}$: $\forall\, x \in \mathbb{R}^+\,;\ x^2 \geq x$

2) La conjonction de deux propositions

Définition 5

La ***conjonction*** de deux propositions $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{Q}$ est la proposition notée ($\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{Q}$) ou ($\boldsymbol{P} \wedge \boldsymbol{Q}$) qui est vraie si $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{Q}$ sont toutes les deux vraies.

La table de vérité de la conjonction :

$\boldsymbol{P}$	$\boldsymbol{Q}$	$\boldsymbol{P} \wedge \boldsymbol{Q}$
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	

Exemples :

Compléter le tableau suivant :

$\boldsymbol{P}$	$\boldsymbol{Q}$	valeur de vérité de		
		$\boldsymbol{P}$	$\boldsymbol{Q}$	$\boldsymbol{P} \wedge \boldsymbol{Q}$
3 est un nombre impair	*6 est un nombre premier*			
3 divise 19	*8 est un nombre impair*			
12 est négatif	*5 est positif*			
$6 \in \mathbb{Q}$	$\exists\, x \in \mathbb{R} : x^2 < x$			

3) La disjonction de deux propositions

Définition 6

La ***disjonction*** de deux propositions P et Q est la proposition notée (P ou Q) ou ($P \vee Q$) qui est fausse si P et Q sont toutes les deux fausses.

La table de vérité de la disjonction :

P	Q	$P \vee Q$
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	

Exemples :

Compléter le tableau suivant :

P	Q	valeur de vérité de		
		P	Q	$P \vee Q$
3 est un nombre impair	*6 est un nombre premier*			
3 divise 19	*8 est un nombre impair*			
12 est négatif	*5 est positif*			
$6 \in \mathbb{Q}$	$\exists\, x \in \mathbb{R} : x^2 < x$			

Remarques :

- La proposition « P et $\overline{P}$ » est une proposition fausse.
- La proposition « P ou $\overline{P}$ » est une proposition vraie.
- Il existe en français deux significations du mot « ou » :
  Il y a le « *ou exclusif* » qui signifie « soit l'un, soit l'autre, mais pas les deux »
  et le « *ou inclusif* » qui signifie « soit l'un, soit l'autre, soit les deux ».

4) L'implication de deux propositions

Activité : Compléter la table suivante :

P	Q	$\overline{P}$	$\overline{P} \vee Q$
1	1		
1	0		
0	1		
0	0		

On remarque que la proposition ($\overline{P}$ ***ou*** Q) est fausse uniquement si P est vraie et Q est fausse.

($\overline{P}$ ***ou*** Q) s'appelle P ***implique*** Q dans cet ordre et on la note $P \Rightarrow Q$.

Définition 7

L'***implication*** de deux propositions P et Q dans cet ordre est la proposition qui est fausse uniquement si P est vraie et Q est fausse et on note $P \Rightarrow Q$.

La table de vérité de l'implication :

P	Q	$P \Rightarrow Q$
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	

Remarques :

- L'implication $P \Rightarrow Q$ est fausse seulement dans le cas P est vraie et Q est fausse.
- L'implication $Q \Rightarrow P$ s'appelle l'implication réciproque de l'implication $P \Rightarrow Q$.
- Si $P \Rightarrow Q$, on n'a pas forcément $Q \Rightarrow P$.

Exemples :

Compléter le tableau suivant :

P	Q	valeur de vérité de		
		P	Q	$P \Rightarrow Q$
3 est un nombre impair	*6 est un nombre premier*			
3 divise 19	*8 est un nombre impair*			
12 est négatif	*5 est positif*			
$6 \in \mathbb{Q}$	$\exists\, x \in \mathbb{R} : x^2 < x$			

Remarque :

Les propositions suivantes ont la même signification :

- Si P alors Q.
- P implique Q.
- Pour que Q il suffit P.
- Pour que P il faut que Q.

Exemple :

Les propositions suivantes ont la même signification :

- Si $ABCD$ est un carrée alors $ABCD$ est un parallélogramme.
- $ABCD$ est un carrée implique $ABCD$ est un parallélogramme.
- Pour que $ABCD$ soit un parallélogramme il suffit qu'il soit un carrée.
- Pour que $ABCD$ soit un carrée il faut qu'il soit un parallélogramme

Exercice 3

Montrer que l'implication suivante est vraie :

$$\forall\, x \in \mathbb{R} : \quad 0 \leq x \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{4} \leq x^2 - x + 1 \leq 1$$

5) L'équivalence de deux propositions

Définition 8

L'*équivalence* de deux propositions P et Q est la proposition ($P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$) notée par : $P \Leftrightarrow Q$.

On lit P est équivalente à Q, ou bien P si et seulement si Q.

La table de vérité de l'équivalence :

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	

Exemples :

Compléter le tableau suivant :

P	Q	valeur de vérité de		
		P	Q	$P \Leftrightarrow Q$

III- Lois logiques

1) Définition

Définition 9

On appelle une ***loi logique*** toute proposition constitué par des propositions liées entre elles par des connexions logiques est qui est toujours vraie quel que soit la valeur de vérité des propositions qui la constituent.

2) Quelques lois logique

La distributivité :

- $[P \text{ et } (Q \text{ ou } R)] \Leftrightarrow [(P \text{ et } Q) \text{ ou } (P \text{ et } R)]$
- $[P \text{ ou } (Q \text{ et } R)] \Leftrightarrow [(P \text{ ou } Q) \text{ et } (P \text{ ou } R)]$

lois de Morgan :

- $\overline{(P \text{ et } Q)} \Leftrightarrow (\overline{P} \text{ ou } \overline{Q})$
- $\overline{(P \text{ ou } Q)} \Leftrightarrow (\overline{P} \text{ et } \overline{Q})$

La loi de transitivité :

- $[(P \Rightarrow R) \text{ et } (R \Rightarrow Q)] \Rightarrow [P \Rightarrow Q]$
- $[(P \Leftrightarrow R) \text{ et } (R \Leftrightarrow Q)] \Rightarrow [P \Leftrightarrow Q]$

Exercice 4

Nier les propositions suivantes : ❶ $\forall x \in \mathbb{R} : (x \neq 1 \text{ ou } x^2 \geq 1)$

❷ $\exists x \in \mathbb{Q} : \sqrt{2} < x \leq \sqrt{3}$

❸ $\forall n \in \mathbb{N} : (n \text{ pair} \Rightarrow n+1 \text{ impair})$

Exercice 5

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant : $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x^2 - y^2 = 0 \end{cases}$

IV- Raisonnements mathématiques

1) Le raisonnement déductif

Le schéma du raisonnement déductif est le suivant :

Quand P est une proposition vraie, et $P \Rightarrow Q$ est une proposition vraie, on peut affirmer que Q est une proposition vraie.

Ce mode de raisonnement s'appelle raisonnement par ***déduction***.

Exemple :

Montrer que : $\forall (x;y) \in ([0;+\infty[)^2 : \ (x < y \implies \sqrt{x+1} - \sqrt{x} > \sqrt{y+1} - \sqrt{y})$.

Exercice 6

Montrer que si : $a \text{ et } b \in \mathbb{Q}$ alors $(a+b) \in \mathbb{Q}$.

2) Raisonnement par contraposée

Le schéma du raisonnement par contraposée est le suivant :

Pour montrer que $\boldsymbol{P \Rightarrow Q}$ est une proposition vraie, il suffit de montrer que $\boldsymbol{\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}}$ est une proposition vraie.

Ce mode de raisonnement s'appelle raisonnement par ***contraposition***.

Exemple : Soient a et b deux nombres réels.

Montrer que : $(a \neq 1 \text{ et } b \neq 1) \implies ab - a - b + 1 \neq 0$

Exercice 7: Soit $n \in \mathbb{N}$.

Montrer que : $n^2 \text{ est pair} \implies n \text{ est pair}$.

Exercice 8: Soient x et y deux nombres réels.

Montrer que : $x + y > 1 \implies \left(x > \frac{1}{2} \text{ ou } y > \frac{1}{2}\right)$

3) Raisonnement par équivalences successives

Pour démontrer que l'équivalence suivante $\boldsymbol{P \Leftrightarrow Q}$ est vrai, on démontre que :

$\boldsymbol{P \Leftrightarrow Q_1}$ **et** $\boldsymbol{Q_1 \Leftrightarrow Q_2}$ **et** $\boldsymbol{Q_2 \Leftrightarrow Q_3}$ **et** … **et** $\boldsymbol{Q_n \Leftrightarrow Q}$

Ce mode de raisonnement s'appelle raisonnement par ***équivalences successives***.

Exemple : Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_*^+ : x + \frac{1}{x} \geq 2$

Exercice 9

Montrer que : $\forall (a;b) \in \mathbb{R}^2 : \ (a^2 + b^2 = 2ab \Leftrightarrow a = b)$

4) Raisonnement par l'absurde

On veut montrer qu'une proposition $\boldsymbol{P}$ est vraie. On suppose que c'est sa négation $\boldsymbol{\overline{P}}$ qui est vraie et on montre que cela entraîne une proposition fausse.

On en conclut que $\boldsymbol{P}$ est vraie.

Ce mode de raisonnement s'appelle raisonnement par ***absurde***.

Exemple :

Soit ABC un triangle dont les longueurs des côtés sont : $2a$, $3a$ et $6a$ avec $a \in \mathbb{R}_*^+$.

Montrer que le triangle ABC n'est pas rectangle.

Exercice 10

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que : $\frac{4n+3}{6} \notin \mathbb{N}$.

Exercice 11: Soient x, y et z des réels positifs tels que : $ab < c$.

Montrer que : $a < \sqrt{c} \text{ ou } b < \sqrt{c}$.

5) Raisonnement par disjonction des cas

On est parfois amené à distinguer plusieurs cas pour démontrer qu'une proposition est vraie. C'est le principe d'une ***démonstration par disjonction de cas***.

En particulier, si l'on souhaite démontrer qu'une proposition $\boldsymbol{P}(x)$ est vraie pour tous les éléments x d'un ensemble E, on peut prouver la proposition pour tous les éléments d'une partie A de E, puis pour les éléments de E n'appartenant pas à A.

Exemple :

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\frac{n(n+1)}{2}$ est un entier naturel.

Exercice 12

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^2 + 2|x-1| - 2 = 0$.

Exercice 13

Montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2+1} - x > 0$.

6) Raisonnement par récurrence

Propriété :

Soit $\boldsymbol{P}(n)$ une fonction propositionnelle à variable $n \in \mathbb{N}$.

Si $\begin{cases} \text{il existe } k \in \mathbb{N} \text{ tel que } \boldsymbol{P}(k) \text{ est vraie} \\ \text{pour tout } n \geq k \text{ on a : } \boldsymbol{P}(n) \implies \boldsymbol{P}(n+1) \end{cases}$ Alors: $\forall n \geq k$, ($\boldsymbol{P}(n)$ est vraie).

En pratique,
$\boldsymbol{P}(n)$ est une proposition dépendant d'entier n, et k désigne un entier naturel donné.
On veut démontrer que pour tout entier naturel $n \geq k$, la propriété $\boldsymbol{P}(n)$ est vraie.
Pour cela, on procède en trois étapes :

Initialisation : on vérifie que $\boldsymbol{P}(k)$ est vraie

Hérédité :
On suppose que $\boldsymbol{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq k$ et on montre que $\boldsymbol{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : On conclut que l'assertion $\boldsymbol{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq k$.

Exemple :

Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$, $1 + 2 + \ \ldots\ + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Exemple :

Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$, ($4^n - 1$ est un multiple de 3).

Exemple 14

Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$, $1^2 + 2^2 + \ \ldots\ + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Exemple 15

Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$, (9 divise $10^n - 1$).

Pour expliquer le principe de récurrence assez intuitivement, prenons l'exemple suivant : La file de dominos.

- Si l'on pousse le premier domino de la file (Initialisation).
- Et si les dominos sont posés l'un après l'autre d'une manière à ce que la chute d'un domino entraine la chute de son suivant (hérédité).
- Alors : Tous les dominos de la file tombent (La conclusion) .



Cours 1 : Notions de logique

I- Définitions 1
1) Proposition 1
2) Fonction propositionnelle 1
3) les quantificateurs 1

II- Les opérations sur les propositions 2
1) La négation d'une proposition 2
2) La conjonction de deux propositions 3
3) La disjonction de deux propositions 4
4) L'implication de deux propositions 4
5) L'équivalence de deux propositions 5

III. Lois logique 6
1) Définition 6
2) Quelques lois logique 6

IV. Raisonnements mathématiques 6
1) Le raisonnement déductif 6
2) Raisonnement par contraposée 7
3) Raisonnement par équivalences successives 7
4) Raisonnement par l'absurde 7
5) Raisonnement par disjonction des cas 8
6) Raisonnement par récurrence 8