Prof. Taher Bouyguir

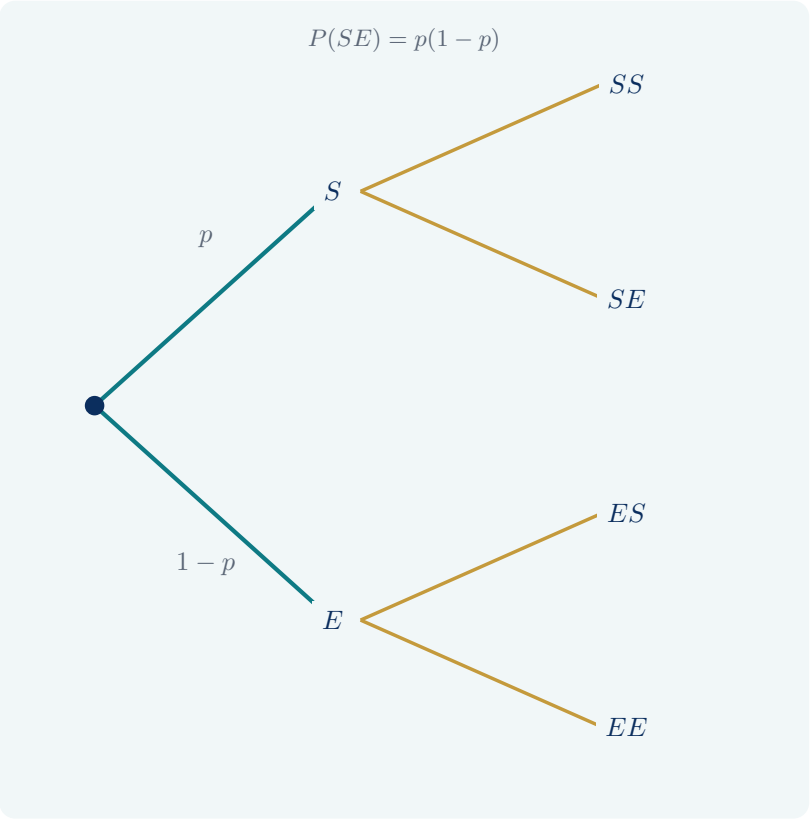
Professeur de mathématiques
Secondaire qualifiant

Prof Taher
Prof Taher Bouyguir
Taher Bouyguir
Contact WhatsApp
Telegram
mr.bouyguir@gmail.com
www.proftaher.com

1ère Spé Maths

CHAPITRE 13

Loi de Bernoulli et répétition d'épreuves



Cours et corrigés des applications

13 Cours

Loi de Bernoulli et répétition d'épreuves

Capacités attendues

- Reconnaître une situation aléatoire modélisée par une loi de Bernoulli.
- Répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, pour $n \leqslant 4$.
- Calculer les probabilités à l'aide d'un arbre lorsque $n \leqslant 4$.

Prérequis : arbres pondérés, événements indépendants (Chap 3) ; variable aléatoire, loi, espérance, variance (Chap 7).

Table des matières

I Épreuve de Bernoulli – Loi de Bernoulli . . . 3
II Répétition d'épreuves de Bernoulli . . . 4
1 Schéma de Bernoulli et arbre . . . 4
2 Nombre de succès . . . 5
III Reconnaître un schéma de Bernoulli . . . 7
Corrigés des applications . . . 9

I Épreuve de Bernoulli – Loi de Bernoulli

Définition 1 : épreuve de Bernoulli

Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire qui n'a que **deux issues** :
- le **succès**, noté S, de probabilité p ;
- l'**échec**, noté E (ou $\overline{S}$), de probabilité $1-p$.

Le nombre p $(0 \leqslant p \leqslant 1)$ est le **paramètre** de l'épreuve.

Exemple

- On lance un dé équilibré ; succès : « obtenir 6 ». C'est une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = \dfrac{1}{6}$.
- On répond au hasard à une question de QCM à 4 choix ; succès : « bonne réponse », $p = \dfrac{1}{4}$.
- On lance un dé et on note le numéro obtenu : il y a 6 issues, ce n'est **pas** une épreuve de Bernoulli (sauf si l'on choisit un succès, par exemple « nombre pair »).

Définition 2 : loi de Bernoulli

Soit X la variable aléatoire qui vaut 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec. On dit que X suit la **loi de Bernoulli de paramètre** p, notée $\mathcal{B}(p)$:

x_i	0	1
$P(X = x_i)$	$1-p$	p

Propriété 1 : espérance et variance

Si X suit la loi de Bernoulli de paramètre p : $\quad E(X) = p \quad$ et $\quad V(X) = p(1-p)$.

Démonstration

$E(X) = 0 \times (1-p) + 1 \times p = p$. $E(X^2) = 0^2 \times (1-p) + 1^2 \times p = p$, donc $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = p - p^2 = p(1-p)$. □

Application 1

Pour chaque expérience, dire s'il s'agit d'une épreuve de Bernoulli et, si oui, donner son paramètre.

1. On lance un dé équilibré ; succès : « obtenir un nombre pair ».
2. On tire une carte d'un jeu de 32 cartes ; succès : « obtenir un cœur ». Donner $E(X)$ et $V(X)$ pour la variable de Bernoulli associée.
3. Un archer atteint la cible avec la probabilité $0{,}7$; on observe un tir.

4 On lance deux dés et on note la somme obtenue.

Ma réponse :

II Répétition d'épreuves de Bernoulli

1 Schéma de Bernoulli et arbre

Définition 3 : répétition d'épreuves identiques et indépendantes

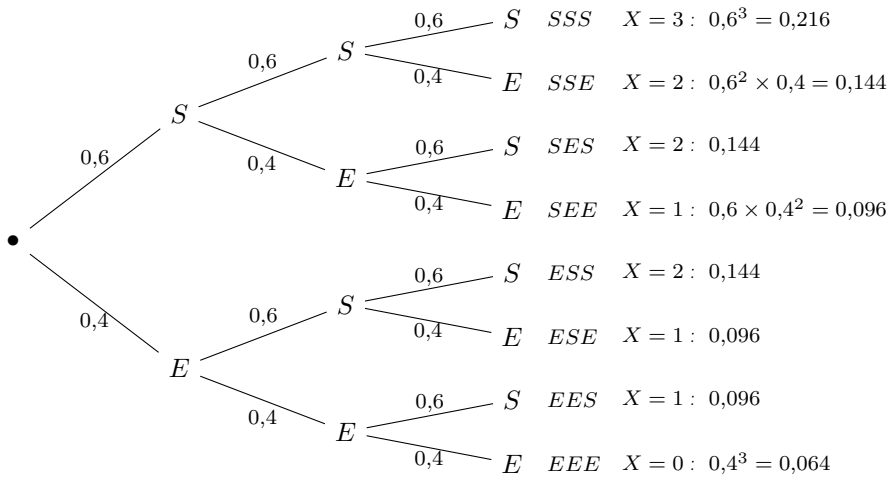
On répète n fois **la même** épreuve de Bernoulli de paramètre p, de façon **indépendante** (le résultat d'une épreuve n'influence pas les autres). On représente la situation par un **arbre pondéré** à n niveaux, où chaque branche « succès » porte p et chaque branche « échec » porte $1-p$.

Propriété 2 : probabilité d'un chemin

Grâce à l'indépendance, la probabilité d'une issue (un chemin de l'arbre) est le **produit** des probabilités inscrites sur ses branches. Un chemin comportant k succès et $n-k$ échecs a pour probabilité $p^k(1-p)^{n-k}$.

Exemple : $n = 3$, $p = 0{,}6$

On répète trois fois une épreuve de Bernoulli de paramètre $0{,}6$.



Par exemple, $P(SES) = 0{,}6 \times 0{,}4 \times 0{,}6 = 0{,}144$.

2 Nombre de succès

Méthode : loi du nombre de succès X, pour $n \leqslant 4$

1. Construire l'arbre (ou le décrire) et compter le nombre de chemins qui comportent exactement k succès.
2. $P(X = k) =$ (nombre de chemins à k succès) $\times\, p^k(1-p)^{n-k}$.

Nombres de chemins à retenir (ils se lisent sur l'arbre) :

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$
$n=2$	1	2	1		
$n=3$	1	3	3	1	
$n=4$	1	4	6	4	1

Exemple : suite : $n = 3$, $p = 0{,}6$

k	0	1	2	3
$P(X=k)$	$0{,}4^3 = 0{,}064$	$3 \times 0{,}6 \times 0{,}4^2 = 0{,}288$	$3 \times 0{,}6^2 \times 0{,}4 = 0{,}432$	$0{,}6^3 = 0{,}216$

Vérification : $0{,}064 + 0{,}288 + 0{,}432 + 0{,}216 = 1$. ✓

Remarque

- « Au moins un succès » est l'événement contraire de « aucun succès » : $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (1-p)^n$.
- Dans l'exemple, $E(X) = 0 \times 0{,}064 + 1 \times 0{,}288 + 2 \times 0{,}432 + 3 \times 0{,}216 = 1{,}8 = 3 \times 0{,}6$: on constate que $E(X) = n \times p$ (résultat général démontré en Terminale).

Application 2

Un QCM comporte 3 questions indépendantes ; chacune propose 4 réponses dont une seule est juste. Un élève répond au hasard. On note X le nombre de bonnes réponses.

1. Justifier qu'il s'agit d'une répétition d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. Préciser n et p.
2. Construire l'arbre et déterminer la loi de X.
3. Calculer la probabilité d'avoir au moins 2 bonnes réponses, puis $E(X)$.

Ma réponse :

Application 3

Un archer atteint la cible avec la probabilité $0{,}7$. Il tire 4 flèches, les tirs étant indépendants.

1. Calculer la probabilité qu'il atteigne la cible 4 fois.
2. Calculer la probabilité qu'il atteigne la cible au moins une fois.
3. Calculer la probabilité qu'il atteigne la cible exactement 2 fois.

Ma réponse :

III Reconnaître un schéma de Bernoulli

Méthode : vérifier les conditions

Pour utiliser la méthode précédente, il faut :

1. une épreuve à **deux issues** (succès / échec) ;
2. répétée **à l'identique** (même probabilité p à chaque fois) ;
3. de façon **indépendante**.

Attention : des tirages **sans remise** ne sont pas indépendants (la composition de l'urne change) : ce n'est pas une répétition d'épreuves identiques et indépendantes.

Application 4

Une urne contient 3 boules rouges et 7 boules noires. On tire deux boules ; on s'intéresse au nombre de boules rouges.

1. Les tirages se font avec remise. Est-ce une répétition d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes ? Calculer la probabilité de tirer deux boules rouges.
2. Même question si les tirages se font sans remise.

Ma réponse :

Application 5

(Synthèse) On lance 3 fois une pièce équilibrée. Pour jouer, on paie 3 € et chaque « Pile » rapporte 2 €. On note X le nombre de « Pile » et G le gain net.

1. Déterminer la loi de X à l'aide d'un arbre.
2. Calculer $P(X \geqslant 2)$.
3. Exprimer G en fonction de X, puis calculer $E(X)$ et $E(G)$. Le jeu est-il équitable ?

Ma réponse :

Corrigés des applications

Corrigé de l'application 1

1. Oui : deux issues (pair / impair), $p = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$.
2. Oui : $p = \dfrac{8}{32} = \dfrac{1}{4}$; $E(X) = \dfrac{1}{4}$ et $V(X) = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{3}{16}$.
3. Oui : succès « atteindre la cible », $p = 0{,}7$.
4. Non : la somme peut prendre 11 valeurs (de 2 à 12).

Corrigé de l'application 2

1. Trois fois la même épreuve à deux issues (juste / fausse), avec $p = \dfrac{1}{4}$ à chaque question, de façon indépendante : $n = 3$, $p = \dfrac{1}{4}$.
2. $P(X = 0) = \left(\dfrac{3}{4}\right)^3 = \dfrac{27}{64}$; $P(X = 1) = 3 \times \dfrac{1}{4} \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^2 = \dfrac{27}{64}$; $P(X = 2) = 3 \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^2 \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{9}{64}$; $P(X = 3) = \left(\dfrac{1}{4}\right)^3 = \dfrac{1}{64}$.
3. $P(X \geqslant 2) = \dfrac{9+1}{64} = \dfrac{10}{64} = \dfrac{5}{32} \approx 0{,}156$. $E(X) = \dfrac{0+27+18+3}{64} = \dfrac{48}{64} = \dfrac{3}{4}$ $\left(= 3 \times \frac{1}{4}\right)$.

Corrigé de l'application 3

$n = 4$, $p = 0{,}7$.

1. $P(X = 4) = 0{,}7^4 = 0{,}2401$.
2. $P(X \geqslant 1) = 1 - 0{,}3^4 = 1 - 0{,}0081 = 0{,}9919$.
3. Il y a 6 chemins avec 2 succès : $P(X = 2) = 6 \times 0{,}7^2 \times 0{,}3^2 = 6 \times 0{,}49 \times 0{,}09 = 0{,}2646$.

Corrigé de l'application 4

1. Avec remise, l'urne est la même à chaque tirage : deux épreuves identiques et indépendantes, $p = 0{,}3$. $P(\text{2 rouges}) = 0{,}3^2 = 0{,}09$.
2. Sans remise, la probabilité au second tirage dépend du premier : ce n'est pas un schéma de Bernoulli. Avec un arbre : $P(\text{2 rouges}) = \dfrac{3}{10} \times \dfrac{2}{9} = \dfrac{6}{90} = \dfrac{1}{15} \approx 0{,}067$.

Corrigé de l'application 5

1. $n = 3$, $p = \frac{1}{2}$: chaque chemin a pour probabilité $\frac{1}{8}$. $P(X = 0) = \frac{1}{8}$, $P(X = 1) = \frac{3}{8}$, $P(X = 2) = \frac{3}{8}$, $P(X = 3) = \frac{1}{8}$.
2. $P(X \geqslant 2) = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$.
3. $G = 2X - 3$. $E(X) = \frac{0+3+6+3}{8} = 1{,}5$ et $E(G) = 2E(X) - 3 = 0$: le jeu est équitable.