Prof : BOUYGUIR Taher
Classe : 1BacSEG

Les Matrices et les Systemes

Année scolaire : 2022/2023

Contenue	Remarques

I. *Généralités sur les matrices*

Définition :

Une matrice de taille *m* x *n* est un tableau de nombres formé de *m* lignes et *n* colonnes.
Une telle matrice s'écrit sous la forme :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Les nombres a_{ij} sont appelés les coefficients de la matrice.

Exemple :

$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ **est une matrice de taille 2 x 3.**

Définition :

Une matrice de taille *n* x *n* est appelée une matrice carrée.

Exemple :

$B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$ **est une matrice carrée de taille 2.**

Définition :

Une matrice de taille *n* x 1 est appelée une matrice colonne.
Une matrice de taille 1 x *m* est appelée une matrice ligne.

Exemple :

Les coordonnées d'un vecteur du plan est une matrice colonne de dimension 2 x 1.

Propriété :

Deux matrices sont égales si, et seulement si, elles ont la même taille et ont les coefficients égaux placés aux mêmes positions.

II. *Opérations sur les matrices*

1) Somme de matrices

Définition :

Soit *A* et *B* deux matrices de même taille.
La somme de *A* et *B* est la matrice, notée *A* + *B*, dont les coefficients sont obtenus en additionnant deux à deux des coefficients qui ont la même position dans *A* et *B*.

Exemple :

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ **et** $B = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 10 \end{pmatrix}$ **alors** $C = A + B = \begin{pmatrix} 2+5 & 3-3 \\ 4-3 & -1+10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$

Remarque :

Cette définition montre qu'il n'est possible d'additionner que des matrices de même taille.

Propriétés :

Soit *A*, *B* et *C* trois matrices carrées de même taille.
a) Commutativité : *A* + *B* = *B* + *A*
b) Associativité : (*A* + *B*) + *C* = *A* + (*B* + *C*)

2) Produit d'une matrice par un réel

Définition :

Soit A une matrice et k un nombre réel.
La produit de A par le réel k est la matrice, notée kA, dont les coefficients sont obtenus en multipliant tous les coefficients de A par k.

Exemple :

$A = \begin{pmatrix} -2 & 5{,}5 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ **alors** $B = 2A = \begin{pmatrix} 2 \times (-2) & 2 \times 5{,}5 \\ 2 \times 2 & 2 \times (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 11 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}$

Propriétés :

Soit A et B deux matrices carrées de même taille et deux réels k et k'.
a) $(k + k')A = kA + k'A$
b) $k(A + B) = kA + kB$
c) $(kk')A = k(k'A)$
d) $(kA)B = A(kB) = k(A \text{ x } B)$

3) Produit d'une matrice carrée par une matrice colonne

Définition :

Soit A une matrice carrée de taille n et B une matrice colonne à n lignes telles que :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Le produit de la matrice carrée A par la matrice colonne B est la matrice colonne à n lignes, notée A x B et égale à :

$$A \times B = \begin{pmatrix} a_{11} \times b_1 + a_{12} \times b_2 + \dots + a_{1n} \times b_n \\ a_{21} \times b_1 + a_{22} \times b_2 + \dots + a_{2n} \times b_n \\ \dots \\ a_{n1} \times b_1 + a_{n2} \times b_2 + \dots + a_{nn} \times b_n \end{pmatrix}$$

Exemple :

$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ **et** $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ **alors** $A \times B = \begin{pmatrix} 2 \times 3 + 5 \times 4 \\ -3 \times 3 + 1 \times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 \\ -5 \end{pmatrix}$

4) Produit de deux matrices carrées

Définition :

Soit A et B deux matrices de même taille.
La produit de A et B est la matrice, notée A x B, dont les colonnes correspondent au produit de la matrice A par chaque colonne de la matrice B.

Exemple :

$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ **et** $B = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

alors :

$$A \times B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \times 3 + 3 \times 4 & -2 \times (-3) + 3 \times 1 \\ 1 \times 3 + 2 \times 4 & 1 \times (-3) + 2 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 11 & -1 \end{pmatrix}$$

et

$$B \times A = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times (-2) + (-3) \times 1 & 3 \times 3 + (-3) \times 2 \\ 4 \times (-2) + 1 \times 1 & 4 \times 3 + 1 \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 3 \\ -7 & 14 \end{pmatrix}$$

Remarque :

La multiplication de matrices n'est pas commutative : $A \times B \neq B \times A$

Propriétés :

Soit A, B et C trois matrices carrées de même taille et un réel k.
a) Associativité : $(A \times B) \times C = A \times (B \times C) = A \times B \times C$
b) Distributivité : $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$ et $(A + B) \times C = A \times C + B \times C$
c) $(kA)B = A(kB) = k(A \times B)$

5) Puissance d'une matrice carrée

Définition :

Soit A une matrice carrée et n un entier naturel.
Le carré de A est la matrice, noté A^2, égale à $A \times A$.
Le cube de A est la matrice, noté A^3, égale à $A \times A \times A$.
Plus généralement, la puissance n-ième de A est la matrice, notée A^n, égale au produit de n facteurs A.

Exemple :

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ **une matrice diagonale.**

Alors $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 \times 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1^2 & 0 \\ 0 & 0 & 4^2 \end{pmatrix}$

En effet, on constate après calcul que tous les coefficients qui ne se trouvent pas sur la diagonale s'annulent et que sur la diagonale, les coefficients de A^2 sont égaux aux carrées des coefficients de A.
On peut généraliser cette règle à une puissance quelconque.

Ainsi par exemple, $A^5 = \begin{pmatrix} 2^5 & 0 & 0 \\ 0 & 1^5 & 0 \\ 0 & 0 & 4^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1024 \end{pmatrix}$.

Méthode : **Utiliser la calculatrice pour effectuer des calculs matriciels**

On veut calculer le carré de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 2 & 4 & 5 \\ -1 & 5 & -5 \end{pmatrix}$

III. *Matrice inverse*

1) Matrice unité

Définition :

On appelle matrice unité de taille n la matrice carrée formée de n lignes et n colonnes :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Propriété :

Pour toute matrice carrée A de taille n, on a : $A \times I_n = I_n \times A = A$

Exemple :

$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ **Alors :**

$$A \times I_2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 1 + (-2) \times 0 & 3 \times 0 + (-2) \times 1 \\ 1 \times 1 + 4 \times 0 & 1 \times 0 + 4 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

2) Matrice inverse d'une matrice carrée

Définition :

Une matrice carrée A de taille n est une matrice inversible s'il existe une matrice B telle que $A \times B = B \times A = I_n$.
La matrice B, notée A^{-1} est appelée la matrice inverse de A.

Exemple :

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ **et** $B = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}2 \\ -0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$

$$A \times B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}2 \\ -0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 0{,}2 + (-1) \times (-0{,}4) & 3 \times 0{,}2 + (-1) \times 0{,}6 \\ 2 \times 0{,}2 + 1 \times (-0{,}4) & 2 \times 0{,}2 + 1 \times 0{,}6 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Les matrices A et B sont donc inverses l'une de l'autre.

Remarque :

Toutes les matrices ne sont pas inversibles.

Propriété :

La matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ **est inversible si, et seulement si,** $ad - bc \neq 0$.

Méthode : Calculer l'inverse d'une matrice carrée de taille 2

Calculer l'inverse de la matrice $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

On a : $C \times C^{-1} = I_2$ **soit** $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Donc : $\begin{pmatrix} 2c & 2d \\ a+2c & b+2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Et donc :
$$\begin{cases} 2c = 1 \\ 2d = 0 \\ a + 2c = 0 \\ b + 2d = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \dfrac{1}{2} \\ d = 0 \\ a + 2 \times \dfrac{1}{2} = 0 \\ b + 2 \times 0 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \dfrac{1}{2} \\ d = 0 \\ a = -1 \\ b = 1 \end{cases}$$

D'où $C^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

Propriété :

Soit A une matrice carrée inversible de taille n et M et N deux matrices carrées ou colonnes de taille n. On a :
$A \times M = N$, si et seulement si, $M = A^{-1} \times N$

Démonstration :

$A \times M = N \Leftrightarrow A^{-1} \times (A \times M) = A^{-1} \times N$
Comme $A^{-1} \times (A \times M) = (A^{-1} \times A) \times M = I_n \times M = M$, on a :
$M = A^{-1} \times N$

Méthode : Résoudre une équation matricielle

Déterminer la matrice colonne X vérifiant $AX = X + B$ **avec** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ **et** $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

- On a : $AX = X + B$

$$\Leftrightarrow AX - X = B$$
$$\Leftrightarrow (A - I_2)X = B$$

- Calculons $C = A - I_2$ **et démontrons que cette matrice est inversible :**

$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Or, $0 \times 2 - 1 \times 2 = -2 \neq 0$ **donc *C* est inversible.**

Ainsi, on a : $X = C^{-1} \times B$.

- Dans la méthode précédente, on a calculé l'inverse C^{-1} **de la matrice *C* :**

$C^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

- Ainsi, $X = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \times (-1) + 1 \times 2 \\ \frac{1}{2} \times (-1) + 0 \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

IV. *Ecriture matricielle d'un système linéaire*

Exemple : **On considère le système (S) suivant :** $\begin{cases} 5x + 2y = 16 \\ 4x + 3y = 17 \end{cases}$

On pose : $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ **et** $B = \begin{pmatrix} 16 \\ 17 \end{pmatrix}$.

On a alors : $A \times X = \begin{pmatrix} 5x + 2y \\ 4x + 3y \end{pmatrix}$ **et ainsi, le système peut s'écrire** $A \times X = B$.

Propriété :

Soit *A* une matrice carrée inversible de taille *n* et *B* une matrice colonne à *n* lignes.
Alors le système linéaire d'écriture matricielle $A \times X = B$ **admet une unique solution donnée par la matrice colonne** $A^{-1}B$.

Démonstration :

$A \times X = B$ **Alors** $X = A^{-1}B$.

Remarque :

Dans le contexte de la propriété précédente, si *A* n'est pas inversible alors le système correspondant possède une infinité de solutions ou aucune solution.

Méthode : Résoudre un système à l'aide des matrices

Résoudre le système (S) suivant : $\begin{cases} 5x + 2y = 16 \\ 4x + 3y = 17 \end{cases}$.

On a vu plus haut qu'en posant $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ **et** $B = \begin{pmatrix} 16 \\ 17 \end{pmatrix}$.

Le système peut s'écrire sous forme matricielle : $A \times X = B$.

En calculant l'inverse de la matrice A, on a $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{-2}{7} \\ \frac{-4}{7} & \frac{5}{7} \end{pmatrix}$.

Ainsi $X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{-2}{7} \\ \frac{-4}{7} & \frac{5}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16 \\ 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Le système a donc pour solution le couple (*x* ; *y*) = (2 ; 3).