Chapitre 7

Nombres complexes

Niveau : 2ème Année Bac

PC & SVT

MATHEMATIQUES

~Prof : Bouyguir Taher~

Contenu du chapitre 7

I. L'ensemble des nombres complexes 1
1. Définition d'un nombre complexe 1
2. Forme algébrique d'un nombre complexe 1
3. Opérations sur les nombres complexes 2
4. Puissances de i : 3
II. Interprétation géométrique des nombres complexes 3
1. Représentation géométrique d'un nombre complexe 3
2. Interprétation géométrique de la somme de deux complexes et produit d'un complexe par un scalaire 4
3. Condition complexe d'alignement de trois points 5
III. Conjugué d'un nombre complexe 5
IV. Module d'un nombre complexe 7
1. Définition et interprétation géométrique du module 7
2. Propriétés du module 8
V. Forme trigonométrique d'un nombre complexe 9
1. Argument d'un nombre complexe non nul 9
2. Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul 11
3. Angle de deux vecteurs et argument d'un complexe 12
VI. Écritures complexes des transformations usuelles du plan 13
1. La translation 13
2. L'homothétie 14
VII. Résolution d'équations du second degré à coefficients réels 15
VIII. Notation exponentielle d'un nombre complexe non nul -Applications trigonométriques 15
1. Notation exponentielle d'un nombre complexe non nul 15
2. Formule de Moivre – Formules d'Euler – Application 17
2.1. Formule de Moivre 17
2.2. Formules d'Euler 17
3. Écriture complexe d'une rotation 18

I. L'ensemble des nombres complexes

1. Définition d'un nombre complexe

Théorème

Il existe un ensemble, l'ensemble des nombres complexes, noté $\mathbb{C}$, et qui vérifie :

- $\mathbb{C}$ contient l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels
- $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication (et donc d'une soustraction et d'une division) qui possèdent les mêmes règles de calcul que dans l'ensemble $\mathbb{R}$
- Il existe, dans $\mathbb{C}$, un nombre non réel noté i et qui vérifie $i^2 = -1$
- Tout nombre complexe z s'écrit de façon unique sous la forme : $z = a + ib$ où a et b sont des nombres réels

Remarque :

On a : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

2. Forme algébrique d'un nombre complexe

Définition 1

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, il existe deux nombres réels a et b tel que : $z = a + ib$

- L'écriture $\boldsymbol{a + ib}$ s'appelle **la forme algébrique** du nombre complexe z
- Le nombre réel a s'appelle **la partie réelle** du nombre complexe z et on écrit : $\boldsymbol{a = \mathrm{Re}(z)}$
- Le nombre réel b s'appelle **la partie imaginaire** du nombre complexe z et on écrit : $\boldsymbol{b = \mathrm{Im}(z)}$
- Quand a est nul, le nombre complexe z s'écrit $z = ib$ et on dit que z est un **imaginaire pur**
- L'ensemble des imaginaires purs est noté $i\mathbb{R}$, et on a : $i\mathbb{R} = \{ib\ ;\ b \in \mathbb{R}\}$

Application 1 :

Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de chacun des nombres complexes suivants :

$z_1 = 3 - 4i$; $z_2 = \sqrt{2} + i$; $z_3 = 8$; $z_4 = -2i$; $z_5 = (3 + i)i$

Proposition 1

Soient z et z' deux nombres complexes

- $z = z' \iff (\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z') \text{ et } \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(z'))$
- $z = 0 \iff (\mathrm{Re}(z) = 0 \text{ et } \mathrm{Im}(z) = 0)$

Remarque :

- $z \in \mathbb{R} \iff \mathrm{Im}(z) = 0$
- $z \in i\mathbb{R} \iff \mathrm{Re}(z) = 0$

Application 2 :

Déterminer le nombre complexe z qui vérifie : $1 + iz = 3z + 2i$

3. Opérations sur les nombres complexes

Les opérations sur les nombres complexes prolongent naturellement celles que l'on effectue sur les nombres réels.

Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ les formes algébriques deux nombres complexes
On a :

$z + z' = (a + a') + i(b + b')$	$z - z' = (a - a') + i(b - b')$
$z.z' = (aa' - bb') + i(ab' + ba')$	$kz = ka + i(kb)$ pour tout $k \in \mathbb{R}$
$\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i\frac{b}{a^2 + b^2}$ si $z \neq 0$	
$\frac{z'}{z} = \frac{aa' + bb'}{a^2 + b^2} + i\frac{ab' - ba'}{a^2 + b^2}$ si $z \neq 0$	

Remarque :

Soient a et b deux nombres réels. On a :

- $(a + ib)^2 = a^2 - b^2 + 2abi$
- $(a - ib)^2 = a^2 - b^2 - 2abi$
- $(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$

Application 3 :

1. Déterminer les formes algébriques des nombres complexes suivants :

$$z_1 = (3+4i)(1-2i) \; ; \quad z_2 = \frac{3-2i}{1-i} \; ; \quad z_3 = (4-3i)^2 \; ; \quad z_4 = (1+i)^3$$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $z - 3 = i(z-2)$

4. Puissances de i :

Activité : Calculer : i^4 ; i^5 ; i^6 ; i^7 et i^8

Proposition 2

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $i^{4n} = 1$; $i^{4n+1} = i$; $i^{4n+2} = -1$; $i^{4n+3} = -i$

Application 4 :

Déterminer les formes algébriques des nombres complexes suivants :

$$i^{2021} \; ; \qquad (1+i)^{30} \; ; \qquad 1 + i + i^2 + \cdots + i^{2020}$$

II. Interprétation géométrique des nombres complexes

Dans tout ce qui suit, le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$

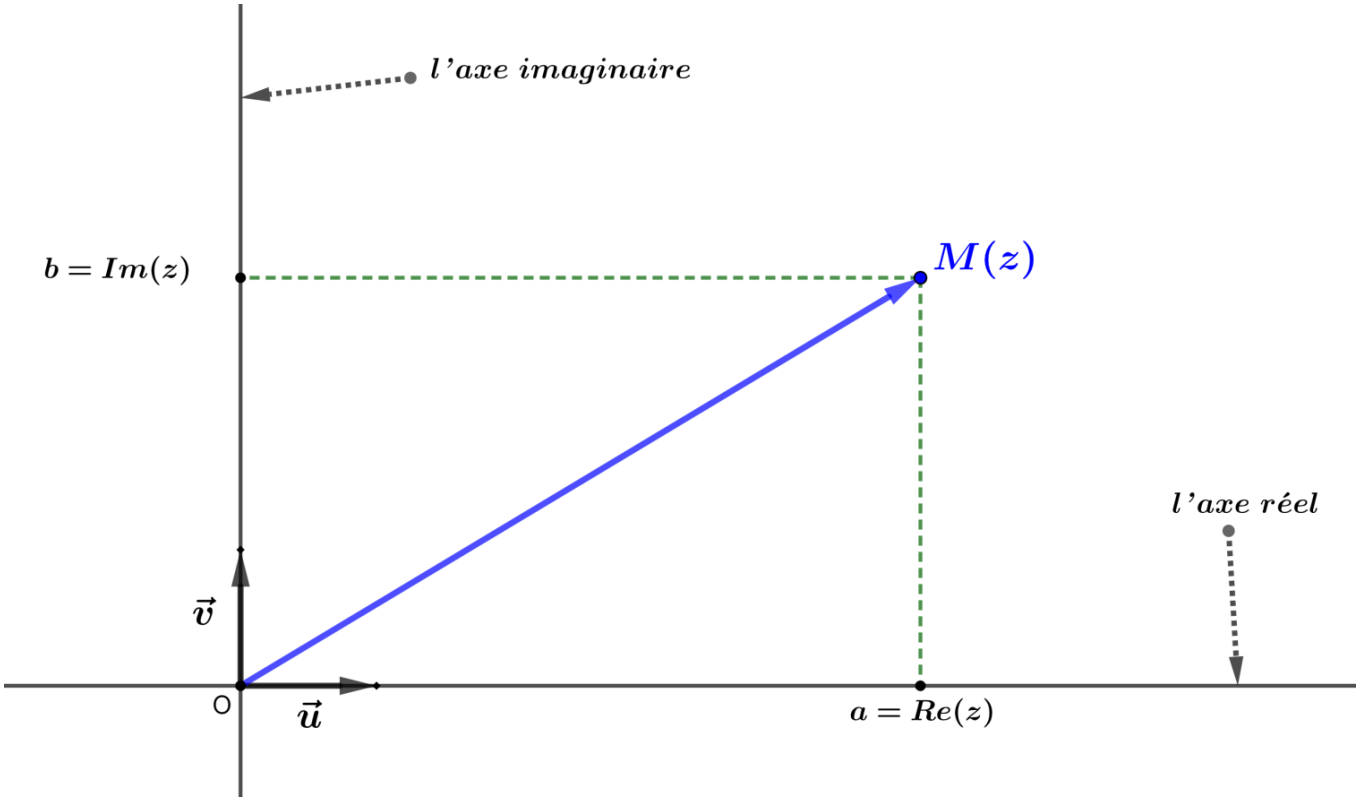
1. Représentation géométrique d'un nombre complexe

Définition 2

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

On lui associe le point M de coordonnées (a, b) dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$

- On dit que M est le **point image** de z, et on écrit : M(z)
  On dit que $\overrightarrow{OM}$ est le **vecteur image** de z, et on écrit : $\overrightarrow{OM}(z)$
- z est appelé **l'affixe du point** M, et aussi **l'affixe du vecteur** $\overrightarrow{OM}$
  On note : $aff(M) = z_M = z$ et $aff(\overrightarrow{OM}) = z_{\overrightarrow{OM}} = z$
- Le plan $(\mathcal{P})$ rapporté au repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ est appelé **plan complexe**
- L'axe des abscisses est appelé l'**axe réel**
- L'axe des ordonnées est appelé l'**axe imaginaire**



Application 5 :

Le plan étant muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$;
Placer les points A, B, C, D et E d'affixes respectives :

$$3 + 2i \ ; \quad 3 - 2i \ ; \quad -4 - i \ ; \quad 3i \ ; \quad -2$$

2. Interprétation géométrique de la somme de deux complexes et produit d'un complexe par un scalaire

Étant donné deux nombres complexes de formes algébriques

$$z = a + ib \ \text{ et } \ z' = a' + ib'$$

et $M(z)$ et $M'(z')$ leurs points images dans le plan complexe et k un nombre réel

- Le nombre complexe $z + z'$ est représenté par le point S donné par la relation vectorielle : $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'}$ (c'est-à-dire OMSM′ parallélogramme)
- Le nombre complexe kz est représenté par le point P donné par la relation vectorielle : $\overrightarrow{OP} = k\overrightarrow{OM}$
- Le nombre complexe $-z$ est représenté par le point N donné par la relation vectorielle : $\overrightarrow{ON} = -\overrightarrow{OM}$ (O est le milieu de [MN])

Proposition 3

Soient A et B deux points du plan complexe et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan ; alors :

- $A = B \iff aff(B) = aff(A)$
- $\vec{u} = \vec{v} \iff aff(\vec{u}) = aff(\vec{v})$
- $aff(\vec{u} + \vec{v}) = aff(\vec{u}) + aff(\vec{v})$
- $aff(k.\vec{u}) = k.aff(\vec{u})$ où k est un nombre réel
- $aff(\overrightarrow{AB}) = aff(B) - aff(A)$
- $aff(I) = \dfrac{aff(A) + aff(B)}{2}$ où I est milieu du segment [AB]

Application 6 :

Soient dans le plan complexe les points : $A(1+i)$; $B(4+2i)$; $C(3-i)$ et $D(-2i)$

Montrer que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme

3. Condition complexe d'alignement de trois points

Proposition 4

Soient A, B et C trois points distincts d'affixes respectives z_A , z_B et z_C

Alors les points A, B et C sont alignés si et seulement si : $\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \in \mathbb{R}$

Preuve

A, B et C sont alignés $\iff$ $\exists\, k \in \mathbb{R}$ tel que : $\overrightarrow{AB} = k.\overrightarrow{AC}$

$\iff$ $\exists\, k \in \mathbb{R}$ tel que : $z_B - z_A = k(z_C - z_A)$

Application 7 :

Soient dans le plan complexe les points : $A(2i)$; $B(1+i)$ et $C(3-i)$

Montrer que A et B et C sont des points alignés

III. Conjugué d'un nombre complexe

Définition 3

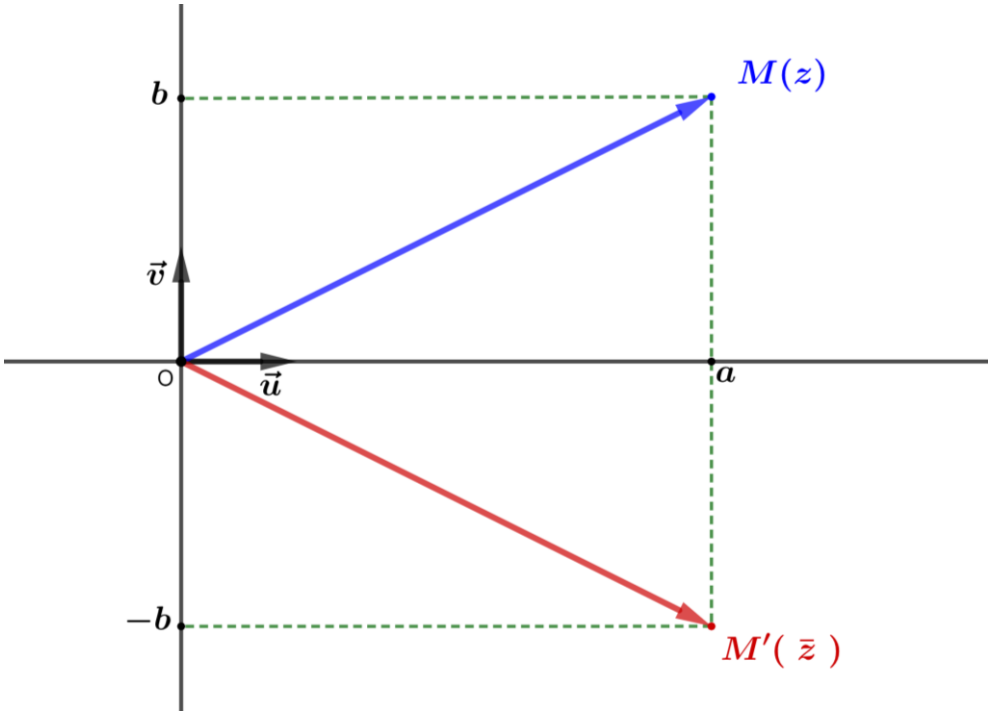
Soit le nombre complexe $z = a + ib$ (a et b sont des réels)

Le nombre complexe qu'on note $\bar{z}$ et qui est égale à : $a - ib$, s'appelle le **conjugué** du nombre complexe z

$$z = a + ib \iff \bar{z} = a - ib$$

Interprétation géométrique

Le point M' d'affixe $\bar{z}$ est le symétrique du point M d'affixe z par rapport à l'axe des réels.



Exemples :

Le nombre complexe z	$5+6i$	$-1-i$	i	12
Son conjugué $\bar{z}$	$5-6i$	$-1+i$	$-i$	12

Application 8 :

Soit z un nombre complexe

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : (E) : $\bar{z} = (1-i)z + 3 + 2i$

Proposition 5

Soit z le nombre complexe de forme algébrique : $a + ib$. On a :

➢ $\bar{\bar{z}} = z$	➢ $z + \bar{z} = 2\mathrm{Re}(z)$	➢ $z \in \mathbb{R} \iff \bar{z} = z$
➢ $z.\bar{z} = a^2 + b^2$	➢ $z - \bar{z} = 2i\mathrm{Im}(z)$	➢ $z \in i\mathbb{R} \iff \bar{z} = -z$

Proposition 6

Soient z et z′ deux nombre complexe et n un entier naturel non nul. Alors :

- ➢ $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$
- ➢ $\overline{z.z'} = \bar{z}.\bar{z'}$
- ➢ $\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\bar{z'}}{\bar{z}}$ $(z \neq 0)$
- ➢ $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$

Application 9 :

1. Montrer que le nombre complexe $u = (2-3i)^4 + (2+3i)^4$ est réel
2. Montrer que le nombre complexe $u = (1+i)^7 - (1-i)^7$ est imaginaire pur

Application 10 :

Soit z un élément de $\mathbb{C}$ avec $z = x + iy$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

1. Donne la forme algébrique de $3iz - \bar{z}$
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $3iz - \bar{z} = 8i$
3. Déterminer les nombres complexes z pour lesquels $3iz - \bar{z}$ est un imaginaire pur

IV. Module d'un nombre complexe

1. Définition et interprétation géométrique du module

Définition 4

Soit z un nombre complexe de forme algébrique : $a + ib$.

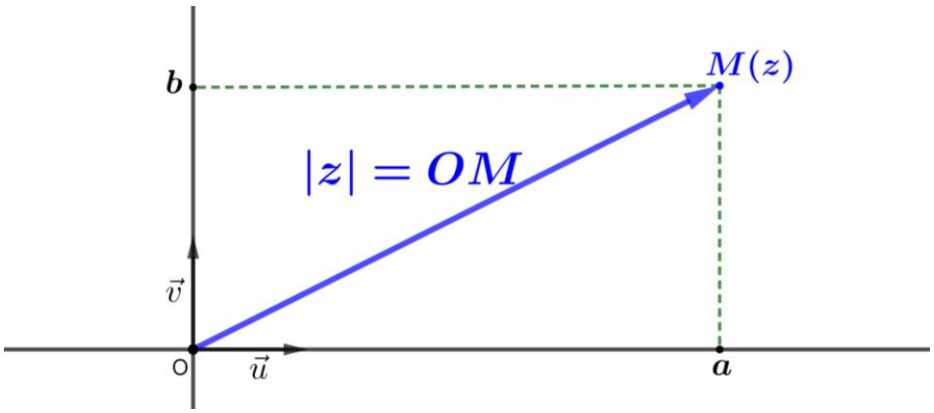
On appelle **module** de z, le nombre réel positif, noté |z| défini par :

$$|z| = \sqrt{z.\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Interprétation géométrique

Soit M l'image du nombre complexe $z = a + ib$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

On a : $|z| = \|\overrightarrow{OM}\| = OM$



Exemples :

- $|12 - 5i| = \sqrt{12^2 + (-5)^2} = \sqrt{169} = 13$
- $|3 + 5i| = \sqrt{3^2 + (5)^2} = \sqrt{34}$
- $|-2\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$
- $|-3i| = 3$

Proposition 7

Considérons dans le plan complexe les deux points : $A(z_A)$ et $B(z_B)$

On a : $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = |z_B - z_A|$

Application 11 :

Considérons dans le plan complexe, les points : $A(1+2i), B(-2)$ et $C(-1+5i)$

Montrer que le triangle ABC est isocèle

Application 12 :

Déterminez l'ensemble des points M(z) dans chacun des cas suivants :

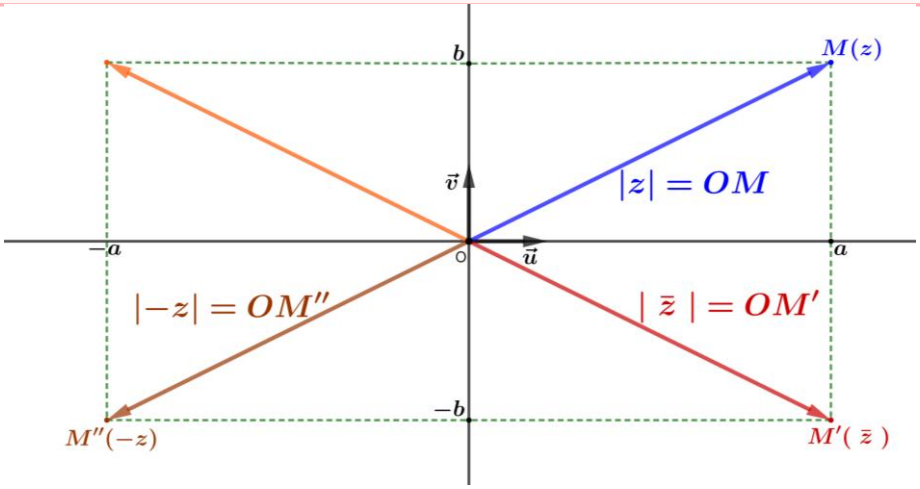
1. $|z-2-i| = 4$
2. $|z-1| = |z-2i+1|$
3. $|z-i| \leq 2$

2. Propriétés du module

Proposition 8

Soient z et z′ deux nombres complexes. On a :

➢ $\|z\| = 0 \iff z = 0$	➢ $\|-z\| = \|\bar{z}\| = \|z\|$
➢ $\|z.z'\| = \|z\|.\|z'\|$	➢ $\|z^n\| = \|z\|^n$ $(z \neq 0$ et $n \in \mathbb{Z})$
➢ $\left\|\frac{z'}{z}\right\| = \frac{\|z'\|}{\|z\|}$ $(z \neq 0)$	➢ $\|z+z'\| \leq \|z\| + \|z'\|$



Application 13 :

Soient z et z′ deux nombres complexes tel que : $z = 1+i$ et $z' = 1-i\sqrt{3}$

1. Calculer |z| et |z′|
2. En déduire le module des nombres suivants : $z.z'$; z^6 et $\left(\frac{z}{z'}\right)^2$

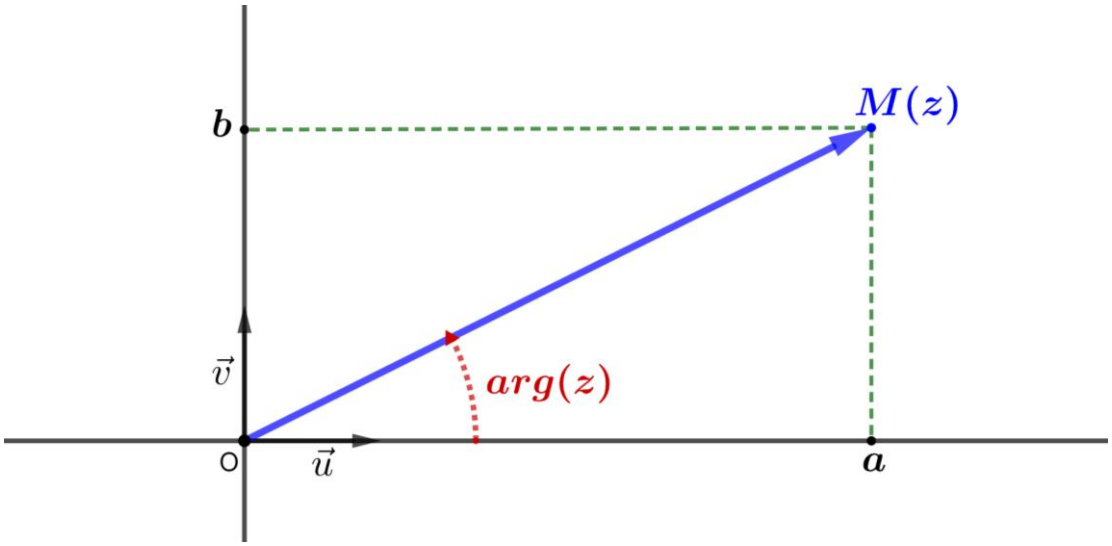
V. Forme trigonométrique d'un nombre complexe

1. Argument d'un nombre complexe non nul

Définition 5

Soit z un nombre complexe non nul et M(z) son image.

On appelle **argument** de z une mesure (en radian) de l'angle orienté $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$ noté arg(z) et on écrit : $\mathbf{arg(z) \equiv (\vec{u}, \overrightarrow{OM})\ [2\pi]}$



Remarques :

- Le nombre 0 n'a pas d'argument
- Si θ un argument de z ($z \in \mathbb{C}$)
  alors : $\theta + 2k\pi$ est aussi un argument de z, pour tout $k \in \mathbb{Z}$

Application 14 :

1. Représenter les points A(4) ; B(i) ; C($-i$) ; D(-3) et E($2+2i$) dans le plan complexe
2. En utilisant ces représentions, déterminer un argument des nombres complexes z_A ; z_B ; z_C ; z_D et z_E

Proposition 9

➢ $z \in \mathbb{R}_+^*$ $\Leftrightarrow$ $arg(z) \equiv 0\ [2\pi]$	➢ $z \in \mathbb{R}_-^*$ $\Leftrightarrow$ $arg(z) \equiv \pi\ [2\pi]$
➢ $z \in i\mathbb{R}_+^*$ $\Leftrightarrow$ $arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$	➢ $z \in i\mathbb{R}_-^*$ $\Leftrightarrow$ $arg(z) \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

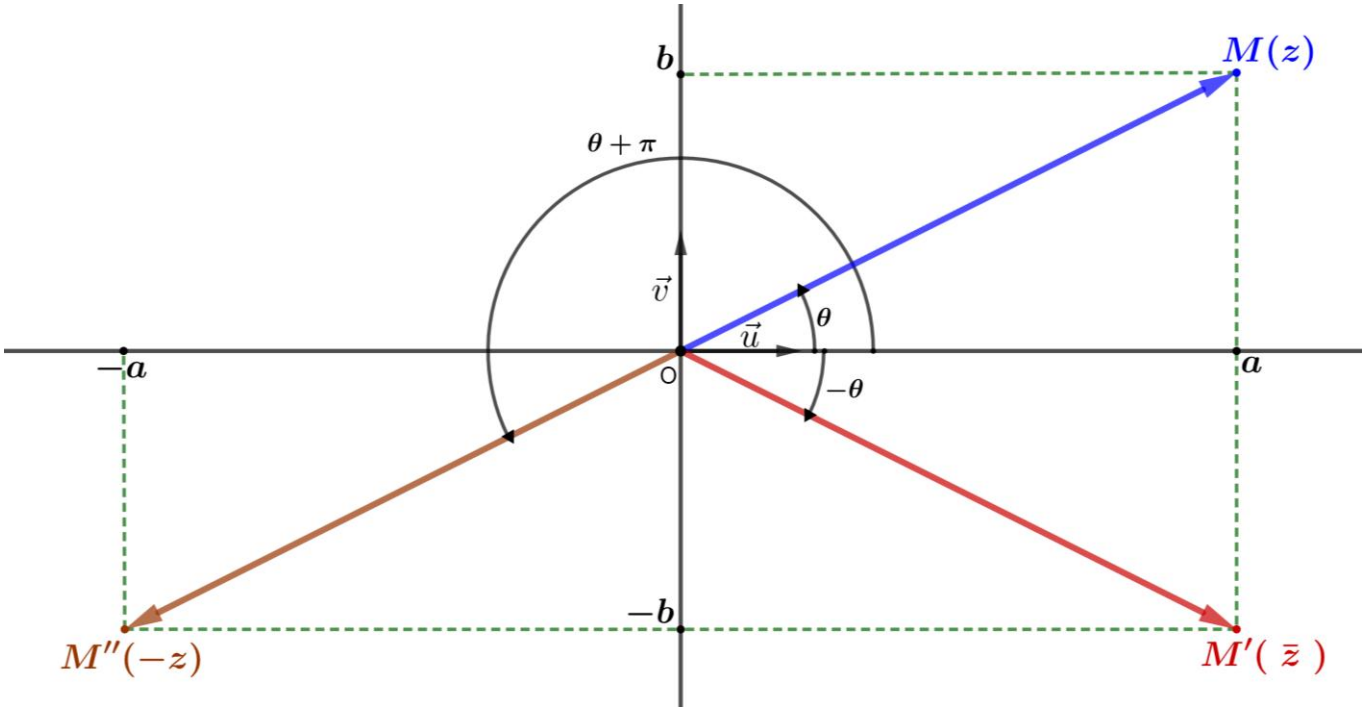
Exemples :

- $\arg(3i) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$
- $\arg(1+\sqrt{3}) \equiv 0\ [2\pi]$
- $\arg(\sqrt{3}-2) \equiv \pi\ [2\pi]$
- $\arg(-i) \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

Proposition 10

Soient z et z′ deux nombres complexes non nuls. On a :

$\arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z)\ [2\pi]$	$\arg(-z) \equiv \pi + \arg(z)\ [2\pi]$
$\arg(z.z') \equiv \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$	Pour tout $n \in \mathbb{Z}$: $\arg(z^n) \equiv n\arg(z)\ [2\pi]$
$\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z)\ [2\pi]$	$\arg\left(\frac{z'}{z}\right) \equiv \arg(z') - \arg(z)\ [2\pi]$



Application 15 :

Soit z_1 , z_2 , z_3 trois nombre complexes non nuls tels que :

$$\arg(z_1) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \quad \text{et} \quad \arg(z_2) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$$

Déterminer l'argument de z_3 dans les deux cas suivants :

$$\frac{z_3}{z_2} = z_1^2 \qquad \text{et} \qquad z_3.\bar{z}_2 = 4z_1$$

2. Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

Proposition 11

Tout nombre complexe non nul z s'écrit de manière unique sous la forme :

$$\mathbf{z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))} \quad \text{où} \quad r = |z| \text{ et } \theta \equiv \arg(z)\ [2\pi]$$

Définition 6

L'écriture $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ s'appelle une **forme trigonométrique** du nombre complexe z, et on écrit : $\mathbf{z = [\,r\,;\theta\,]}$

Remarque :

La détermination d'une écriture trigonométrique d'un nombre complexe non nul z est équivalente à la détermination de son module et d'un de ces arguments.

Pratiquement

Si $z = a + ib$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

alors : $r = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$ et $\cos(\theta) = \dfrac{a}{|z|}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{b}{|z|}$

Application 16 :

Donner une forme trigonométrique de chacun des nombres complexes suivants :

$$z_1 = 1 + \sqrt{3}i \ ; \quad z_2 = 2 - 2i \ ; \quad z_3 = 5i \ ; \quad z_4 = -3$$

$$z_5 = -3\left(\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)$$

Proposition 12

Soient z et z′ deux nombres complexes non nuls tel que : $z = [\,r\,,\theta\,]$ et $z' = [\,r',\theta'\,]$

On a les relations suivantes :

➢ $z = z' \iff r = r'$ et $\theta \equiv \theta'\ [2\pi]$	
➢ $\bar{z} = [\,r\,;-\theta\,]$	➢ $-z = [\,r\,;\theta+\pi\,]$
➢ $z.z' = [\,r.r'\,;\theta+\theta'\,]$	➢ Pour tout $n \in \mathbb{Z}$: $z^n = [\,r^n\,;n\theta\,]$
➢ $\dfrac{1}{z} = \left[\dfrac{1}{r}\,;-\theta\right]$	➢ $\dfrac{z}{z'} = \left[\dfrac{r}{r'}\,;\theta-\theta'\right]$

Application 17 :

On considère les nombres complexes : $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_2 = 1 + i$

1. Écrivez les deux complexes z_1 et z_2 sous leurs formes trigonométriques, déduire la forme trigonométrique de : $z = \dfrac{z_1^2}{z_2}$
2. Écrivez z sous sa forme algébrique
3. En déduire les valeurs exactes de : $\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$
4. Montrez que $z^{12} \in \mathbb{R}$

3. Angle de deux vecteurs et argument d'un complexe

Proposition 13

Soient A, B, C et D quatre points deux a deux distincts du plan complexe d'affixes respectifs z_A, z_B, z_C et z_D. On a :

$$\overline{(\vec{u}, \overrightarrow{AB})} \equiv \arg(z_B - z_A)\ [2\pi]$$

$$\overline{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})} \equiv \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)\ [2\pi]$$

$$\overline{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC})} \equiv \arg\left(\frac{z_C - z_D}{z_B - z_A}\right)\ [2\pi]$$

Application 18 :

On considère dans le plan complexe les points : $A\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right), B\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right), C(i)$

1. Montrer que le triangle ABC est rectangle isocèle en C
2. Montrer que le quadrilatère OACB est un carré

Proposition 14

Soient A, B, C et D des points deux a deux distincts du plan complexe d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D. On a :

- (AB) // (CD) $\Leftrightarrow$ $\arg\left(\dfrac{z_C - z_D}{z_B - z_A}\right) \equiv 0\ [\pi]$
- (AB) $\perp$ (CD) $\Leftrightarrow$ $\arg\left(\dfrac{z_C - z_D}{z_B - z_A}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$
- Les points A, B, C et D sont alignés ou **cocycliques** (appartenant au même cercle) si et seulement si :

$$\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \times \frac{z_B - z_D}{z_C - z_D}\right) \in \mathbb{R}$$

Application 19 :

On considère dans le plan complexe les points

$$A(2+2i)\ ,B(2-i)\ ,C(4+2i)\ ,D(6+2i)$$

1. Déterminer une mesure de $(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AC})$; que peut-on conclure ?
2. Déterminer une mesure de $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB})$; que peut-on conclure à propos de la position relative de (AB) et (AC) ?

Application 20 :

On considère dans le plan complexe les points

$$A(2-2i), B(-1+7i), C(4+2i) \text{ et } D(-4-2i)$$

Montrer que les points A, B, C et D sont cocycliques

Application 21 :

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

On considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_A=\sqrt{3}-i \text{ et } z_B=-z_A \text{ et } z_C=\sqrt{3}+3i$$

et D est le symétrique de C par rapport à l'axe des abscisses

1. Calculer $\dfrac{z_A-z_D}{z_A-z_C}$, puis conclure que les points A, D et C sont alignés
2. Vérifier que : $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$
3. Montrer que le triangle ABC est équilatéral

VI. Résolution d'équations du second degré à coefficients réels

Proposition 15

Soit a, b et c trois réels, a étant non nul, ainsi que l'équation dans $\mathbb{C}$:

$$(E) : az^2 + bz + c = 0$$

On note : $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant.

- Si $\boldsymbol{\Delta > 0}$, alors l'équation (E) a deux racines réelles distinctes z_1 et z_2 données par

$$\mathbf{z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}} \quad \text{et} \quad \mathbf{z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}}$$

- Si $\boldsymbol{\Delta = 0}$, alors l'équation (E) a une racine double réelle donnée par : $\mathbf{z = -\frac{b}{2a}}$

- Si $\boldsymbol{\Delta < 0}$, alors l'équation (E) a deux racines complexes distinctes conjuguées z_1 et z_2 données par :

$$\mathbf{z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}} \quad \text{et} \quad \mathbf{z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}}$$

Application 25 :

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$z^2 = -4 \ ; \qquad z^2 + 2\sqrt{3}z + 4 = 0 \ ; \qquad 2z^2 - 3z + 2 = 0$$

2. On pose : $p(z) = z^3 - 6z^2 + 12z - 16$

Déterminer les deux nombres réels a et b tel que :

$$(\forall z \in \mathbb{C}) : \ p(z) = (z - 4)(z^2 + az + b)$$

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $p(z) = 0$

VII. Notation exponentielle d'un nombre complexe non nul - Applications trigonométriques

1. Notation exponentielle d'un nombre complexe non nul

Activité :

1. On considère le nombre complexe : $z = 2\sqrt{2} + 2i\sqrt{6}$

Montrer que : $z = \left[4\sqrt{2}, \frac{\pi}{3} \right]$

On peut aussi écrire $z = 4\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{3}}$, cette écriture s'appelle la notation exponentielle du nombre z

2. Écrire sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

$$z = 1 - i \quad ; \quad z = 2i \quad ; \quad z = 3 + 3i\sqrt{3} \quad ; \quad z = -3$$

Définition 7

La **forme exponentielle** d'un nombre complexe z non nul est :

$$\mathbf{z = re^{i\theta}} \text{ avec } r = |z| \text{ et } \theta \equiv \arg(z)\ [2\pi]$$

Remarque :

Pour tout réel θ, le nombre $e^{i\theta}$ est le nombre de module 1 et d'argument θ

Autrement dit : $\boldsymbol{e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)}$

Exemples :

- $e^{i\pi} = \cos(\pi) + i\sin(\pi) = -1$
- $2e^{\frac{i3\pi}{4}} = 2\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$

Application 26 :

1. Écrire sous la forme algébrique les nombres complexes suivant :

$$z = 4e^{-\frac{i\pi}{6}} \quad ; \quad z = e^{\frac{i5\pi}{4}}$$

2. Écrire sous forme exponentielle le nombre complexe suivant :

$$z = -3\left(\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\right)$$

Proposition 16

Soient $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$ avec $r, r' \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$

➢ $\left\|e^{i\theta}\right\| = 1$	➢ $\arg\left(e^{i\theta}\right) \equiv \theta\ [2\pi]$	➢ $\bar{z} = re^{-i\theta}$
➢ $z.z' = rr'e^{i(\theta+\theta')}$	➢ $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$	➢ $\frac{z'}{z} = \frac{r'}{r}e^{i(\theta'-\theta)}$
➢ Pour tout entier relatif n on a : $z^n = \left(re^{i\theta}\right)^n = r^n e^{in\theta}$		

Application 27 :

On pose $z_1 = 1 - i$; $z_2 = 2i$ et $z_3 = 3 + 3i\sqrt{3}$

Écrire sous la forme exponentielle les nombres complexes suivants :

$$\frac{3 + 3i\sqrt{3}}{1 - i} \quad ; \qquad (1 - i)^8 \quad ; \qquad \frac{1 - i}{2i(3 - 3i\sqrt{3})}$$

2. Formule de Moivre – Formules d'Euler – Application

2.1. Formule de Moivre

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, on a : $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$

Donc $\left(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

cette égalité s'appelle la formule de Moivre

Proposition 17

Pour tout réel θ et pour tout entier relatif n on a :

$$\left(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta) \quad \text{" Formule de Moivre "}$$

Application 28 :

1. Écrire par deux méthodes $\left(\cos(x) + i\sin(x)\right)^2$ sous la forme algébrique
2. En déduire que $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$
   et que $\sin(2x) = 2\cos(x).\sin(x)$

Application 29 :

1. Écrire par deux méthodes $\left(\cos(x) + i\sin(x)\right)^3$ sous la forme algébrique
2. En déduire que $\cos(3x) = \cos^3(x) - 3\cos(x).\sin^2(x)$
   et que $\sin(3x) = 3\cos^2(x).\sin(x) - \sin^3(x)$

2.2. Formules d'Euler

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a : $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ et $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$

Donc $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$ et $e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin\theta$

Donc $\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

Proposition 18

Pour tout réel θ : $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$ " **Formules d'Euler** "

Application 30 :

1. Par utilisation des formules d'Euler, montrer que :

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2}$$

On dit que l'on a linéarisé le polynôme trigonométrique $\cos^2(x)$

2. Linéariser l'expression : $\sin^2(x)$

Application 31 :

1. Montrer que : $\cos^3(x) = \frac{3}{4}\cos(x) + \frac{1}{4}\cos(3x)$
2. Montrer que : $\sin^3(x) = \frac{3}{4}\sin(x) - \frac{1}{4}\sin(3x)$

VIII. Écritures complexes des transformations usuelles du plan

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$

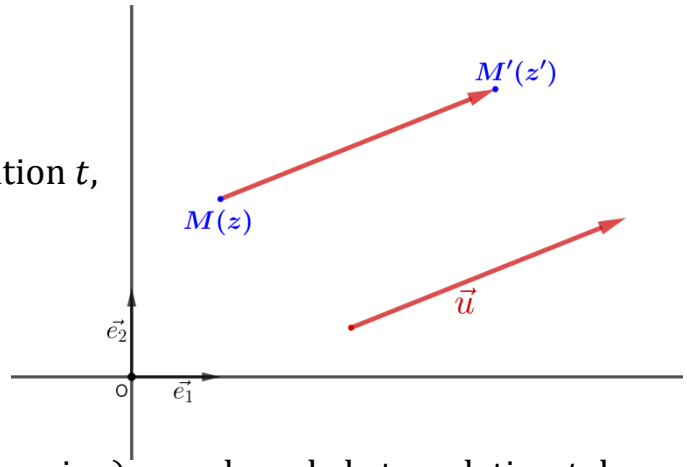
1. La translation

Soit t la translation de vecteur : $\vec{u}(a)$
et soit M'(z') l'image de M(z) par la translation t,

On a : $t(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$

$\Leftrightarrow z' - z = a$

$\Leftrightarrow \mathbf{z' = z + a}$



Cette écriture s'appelle l'écriture (ou l'expression) complexe de la translation t de vecteur $\vec{u}(a)$

Application 22 :

Dans le plan complexe on considère la translation t de vecteur $\vec{u}(-1+2i)$

1. Donner l'écriture complexe de la translation t
2. Déterminer l'affixe de A' l'image du point $A(2i)$ par la translation t
3. Déterminer l'affixe de B sachant que : $t(B) = B'$ et $B'(2-3i)$

2. L'homothétie

Soit $\Omega(\omega)$ un point du plan complexe et k une nombre réel non nul.

et soit h l'homothétie de centre Ω et de rapport k.

Soit M'(z') l'image de M(z) par l'homothétie h, on a :

On a : $h(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k\,\overrightarrow{\Omega M}$

$$\Leftrightarrow \quad z' - \omega = k(z - \omega)$$

$$\Leftrightarrow \quad z' = \omega + k(z - \omega)$$

$$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{z' = kz + (1 - k)\omega}$$

Cette écriture s'appelle l'écriture (ou l'expression) complexe de l'homothétie h de centre $\Omega(\omega)$ et de rapport k

Application 23 :

On considère l'homothétie h de centre $\Omega(2 - i)$ et de rapport 4.

M(z) un point du plan complexe et M'(z') son image par h.

1. Donner l'écriture complexe de l'homothétie h
2. Déterminer l'affixe A' l'image du point $A(1 + i)$ par l'homothétie h
3. Déterminer l'affixe de B sachant que : $h(B)=B'$ et $B'(6 + 3i)$

Application 24 :

Déterminer la nature de chacune des transformations suivantes puis donner ses caractéristiques :

$$z' = z - 3i$$

$$z' = 3z + 2i - 4$$

3. Écriture complexe d'une rotation

Soit $\mathcal{R}$ la rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ
Soit M'(z') l'image de M(z) par la rotation $\mathcal{R}$. On a :

$$\mathcal{R}(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) \equiv \theta\ [2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z' - \omega| = |z - \omega| \\ \arg\left(\dfrac{z' - \omega}{z - \omega}\right) \equiv \theta\ [2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left|\dfrac{z' - \omega}{z - \omega}\right| = 1 \\ \arg\left(\dfrac{z' - \omega}{z - \omega}\right) \equiv \theta\ [2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{z' - \omega}{z - \omega} = e^{i\theta}$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{z' = \omega + (z - \omega)e^{i\theta}}$$

L'écriture : $\mathbf{z' = \omega + (z - \omega)e^{i\theta}}$ s'appelle l'écriture complexe de la rotation $\mathcal{R}$ de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ

Application 32 :

On considère la rotation $\mathcal{R}$ de centre $\Omega(2 + 3i)$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$
M(z) un point du plan complexe et M'(z') son image par $\mathcal{R}$.

1. Donner l'écriture complexe de la rotation $\mathcal{R}$
2. Déterminer l'affixe de A' l'image du point $A(2 - i)$ par la rotation $\mathcal{R}$
3. Déterminer l'affixe de B sachant que $\mathcal{R}(B) = B'$ et $B'(1 + 5i)$