Prof : Bouyguir Taher

Année scolaire : 2023/2024

# Cours 5 : Primitives

## Niveau : 2ème Bac Sciences économiques et Gestion comptable

I- Primitive d'une fonction sur un intervalle ..... 1

II- Primitives et opérations sur les fonctions ..... 2

III- Primitives des fonctions usuelles ..... 2

IV- Autres Primitives ..... 3

$$F' = f$$

# Primitives - 2ème Bac Sciences économiques et Gestion comptable -

## I) Primitive d'une fonction sur un intervalle

**Définition 1 :** Soit deux fonctions $f$ et $F$ définies sur un intervalle $I$.

On dit que la fonction $F$ est une ***primitive*** de la fonction $f$ sur l'intervalle $I$ si :

**1)** La fonction $F$ est dérivable sur $I$.

**2)** $\forall x \in I : F'(x) = f(x)$.

**Exemple 1 :** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x + 7$.

Les fonctions $F$ et $G$ définies sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = x^2 + 7x + 9$ et $G(x) = x^2 + 7x - 112$ sont des primitives de $f$ sur $\mathbb{R}$.

Trouver une primitive est donc l'opération inverse de calculer la fonction dérivée.

**Application 1 :**

Vérifier que la fonction $F$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = -\frac{2}{7}x^7 + 9x^2 - x - \sqrt{3}$ est une primitive de la fonction $f : x \longmapsto -2x^6 + 18x - 1$ sur $\mathbb{R}$.

**Théorème :** Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$.

**1)** Si $f$ est continue sur l'intervalle $I$, alors $f$ admet au moins une primitive sur $I$.

**2)** Si $F$ est une primitive de $f$ sur $I$, alors les primitives de $f$ sur $I$ sont les fonctions de la forme : $x \longmapsto F(x) + c$ où $c \in \mathbb{R}$.

**3)** Soient $x_0$ et $y_0$ deux réels tels que $x_0 \in I$.

Il existe une unique primitive $F$ de $f$ vérifiant : $F(x_0) = y_0$.

**Exemple 2 :** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 + 2x - 7$.

Déterminer la primitive $F$ de $f$ qui s'annule en 2.

**Solution :** La fonction $f$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc elle admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

L'ensemble des primitives de $f$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions :

$$F(x) = \frac{1}{4}x^4 + x^2 - 7x + c \text{ avec } c \in \mathbb{R}.$$

La condition $F$ s'annule en 2 implique que : $F(2) = 0$

soit : $4 + 4 - 14 + c = 0$ donc $c = 6$

La primitive de $f$ qui s'annule en 2 est la fonction : $F(x)=\frac{1}{4}x^4+x^2-7x+6$.

**Application 2 :**

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=3x^2-x+4$.

Déterminer la primitive $F$ de $f$ vérifiant : $F(1)=\frac{5}{2}$.

## II) Primitives et opérations sur les fonctions

**Propriété ( linéarité ) :**

Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies sur un intervalle $I$ et soit $k$ un réel.

- Si $F$ est une primitive de $f$ sur $I$, alors $kF$ est une primitive de $kf$ sur $I$.
- Si $F$ et $G$ sont des primitives respectivement de $f$ et $g$ sur $I$, alors $F+G$ est une primitive de $f+g$ sur $I$.

## III) Primitives des fonctions usuelles

En inversant le tableau des dérivées usuelles, on obtient :

| *Fonction f* | *Primitives de f* | *Remarques* |
|---|---|---|
| $f(x)=0$ | $F(x)=c \;;\; c\in\mathbb{R}$ | |
| $f(x)=a$ | $F(x)=ax+c \;;\; c\in\mathbb{R}$ | $a\in\mathbb{R}$ |
| $f(x)=ax$ | $F(x)=\frac{a}{2}x^2+c \;;\; c\in\mathbb{R}$ | $a\in\mathbb{R}$ |
| $f(x)=x^n$ | $F(x)=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+c \;;\; c\in\mathbb{R}$ | $n\in\mathbb{N}^*$ |
| $f(x)=\frac{1}{x^n}$ | $F(x)=\frac{-1}{n-1}.\frac{1}{x^{n-1}}+c \;;\; c\in\mathbb{R}$ | $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$ |
| $f(x)=\frac{1}{x^2}$ | $F(x)=\frac{-1}{x}+c \;;\; c\in\mathbb{R}$ | |
| $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ | $F(x)=2\sqrt{x}+c \;;\; c\in\mathbb{R}$ | |

# IV) Autres Primitives

Soient $u$ et $v$ deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle $I$.

| Fonction $f$ | Une primitive de $f$ | Remarques |
|---|---|---|
| $u'.u^n$ | $\frac{1}{n+1}u^{n+1}$ | $n \in \mathbb{Z}^* - \{-1\}$ |
| $\frac{u'}{u^2}$ | $\frac{-1}{u}$ | |
| $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ | $2\sqrt{u}$ | |
| $u'v + uv'$ | $u \times v$ | |
| $\frac{u'v - uv'}{v^2}$ | $\frac{u}{v}$ | |

**Exemple 3 :**

Déterminer les primitives de la fonction $f: x \mapsto (x+3)(x^2+6x-9)^4$ sur $\mathbb{R}$.

**Solution :** La fonction $f$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc elle admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

Posons : $u(x) = x^2+6x-9$, alors $u'(x) = 2x+6$.

Donc $f(x) = \frac{1}{2}(2x+6)(x^2+6x-9)^4$

$$= \frac{1}{2}(x^2+6x-9)'(x^2+6x-9)^4 = \frac{1}{2}u'(x).\big(u(x)\big)^4$$

Donc les fonctions primitives de $f$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions :

$$F(x) = \frac{1}{2}.\frac{1}{5}\big(u(x)\big)^5 + c = \frac{1}{10}(x^2+6x-9)^5 + c \quad \text{avec} \quad c \in \mathbb{R}.$$

**Exemple 4 :**

Déterminer les primitives de la fonction $f: x \mapsto \frac{1}{\sqrt{3x+6}}$ sur l'intervalle $]-2;+\infty[$.

**Solution :** Posons : $u(x) = 3x+6$, alors $u'(x) = 3$.

Donc $f(x) = \frac{1}{3}.\frac{3}{\sqrt{3x+6}} = \frac{1}{3}.\frac{(3x+6)'}{\sqrt{3x+6}} = \frac{1}{3}.\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$

Donc les fonctions primitives de $f$ sur $]-2;+\infty[$ sont les fonctions :

$$F(x) = \frac{1}{3} \times 2\sqrt{u(x)} + c = \frac{2}{3}\sqrt{3x+6} + c \quad \text{avec} \quad c \in \mathbb{R}.$$