Chapitre 5

Primitives

Niveau : 2ème Année Bac

PC & SVT

MATHEMATIQUES

~Prof : Bouyguir Taher~

Contenu du chapitre 5

I. Primitive d'une fonction sur un intervalle..... 1

II. Primitives et opérations sur les fonctions 2

III. Primitives des fonctions usuelles..... 2

IV. Autres primitives 3

I. Primitive d'une fonction sur un intervalle

Définition :

Soit deux fonctions f et F définies sur un intervalle I.

On dit que la fonction F est une **primitive** de la fonction f sur l'intervalle I si :

1) La fonction F est dérivable sur I.

2) $\forall x \in I : F'(x) = f(x)$.

Exemple 1 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x + 7$.

Les fonctions F et G définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = x^2 + 7x + 9 \text{ et } G(x) = x^2 + 7x - 112$$

sont des primitives de f sur $\mathbb{R}$.

Trouver une primitive est donc l'opération inverse de calculer la fonction dérivée.

Application 1 :

Vérifier que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = -\frac{2}{7}x^7 + 9x^2 - x - \sqrt{3}$$

est une primitive de la fonction $f: x \longmapsto -2x^6 + 18x - 1$ sur $\mathbb{R}$.

Théorème :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

1) Si f est continue sur l'intervalle I, alors f admet au moins une primitive sur I.

2) Si F est une primitive de f sur I, alors les primitives de f sur I sont les fonctions de la forme : $x \longmapsto F(x) + c$ où $c \in \mathbb{R}$.

3) Soient x_0 et y_0 deux réels tels que $x_0 \in I$.
Il existe une unique primitive F de f vérifiant : $F(x_0) = y_0$.

Exemple 2 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 + 2x - 7$.

Déterminer la primitive F de f qui s'annule en 2.

Solution :

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, donc elle admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

L'ensemble des primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions :

$$F(x) = \frac{1}{4}x^4 + x^2 - 7x + c \text{ avec } c \in \mathbb{R}$$

La condition F s'annule en 2 implique que : $F(2) = 0$

soit : $4 + 4 - 14 + c = 0$ donc $c = 6$

La primitive de f qui s'annule en 2 est la fonction : $F(x) = \frac{1}{4}x^4 + x^2 - 7x + 6$.

Application 2 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 3x^2 - x + 4$.

Déterminer la primitive F de f vérifiant : $F(1) = \frac{5}{2}$.

II. Primitives et opérations sur les fonctions

Propriété (linéarité) :

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I et soit k un réel.

- Si F est une primitive de f sur I, alors kF est une primitive de kf sur I.
- Si F et G sont des primitives respectivement de f et g sur I, alors $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I.

III. Primitives des fonctions usuelles

En inversant le tableau des dérivées usuelles, on obtient :

Fonction f	Primitives de f	Remarques
$f(x) = a$	$F(x) = ax + c \ ; \ c \in \mathbb{R}$	$a \in \mathbb{R}$
$f(x) = x^n$	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c \ ; \ c \in \mathbb{R}$	$n \in \mathbb{N}^*$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$	$F(x) = \frac{-1}{n-1}.\frac{1}{x^{n-1}} + c \ ; \ c \in \mathbb{R}$	$n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + c \ ; \ c \in \mathbb{R}$	
$f(x) = x^r$	$F(x) = \frac{1}{r+1}x^{r+1} + c \ ; \ c \in \mathbb{R}$	$r \in \mathbb{Q}^* - \{-1\}$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x + c \ ; \ c \in \mathbb{R}$	
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x + c \ ; \ c \in \mathbb{R}$	
$f(x) = 1 + \tan^2 x$	$F(x) = \tan x + c \ ; \ c \in \mathbb{R}$	

IV. Autres primitives

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I.

Fonction f	Une primitive de f	Remarques
$u'.u^n$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}$	$n \in \mathbb{N}^*$
$\frac{u'}{u^2}$	$\frac{-1}{u}$	
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	
$u'.u^r$	$\frac{1}{r+1}u^{r+1}$	$r \in \mathbb{Q}^* - \{-1\}$
$u'v + uv'$	$u \times v$	
$\frac{u'v - uv'}{v^2}$	$\frac{u}{v}$	

Exemple 3 :

Déterminer les primitives de la fonction $f: x \mapsto (x+3)(x^2+6x-9)^4$ sur $\mathbb{R}$.

Solution :

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, donc elle admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

Posons : $u(x) = x^2+6x-9$,

alors $u'(x) = 2x+6$.

Donc $f(x) = \frac{1}{2}(2x+6)(x^2+6x-9)^4$

$= \frac{1}{2}(x^2+6x-9)'(x^2+6x-9)^4$

$= \frac{1}{2}u'(x).\left(u(x)\right)^4$

Donc les fonctions primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions :

$F(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{5}\left(u(x)\right)^5 + c$

$= \frac{1}{10}(x^2+6x-9)^5 + c$ avec $c \in \mathbb{R}$.

Exemple 4 :

Déterminer les primitives de la fonction $f: x \mapsto \frac{1}{\sqrt{3x+6}}$ sur $]-2;+\infty[$.

Solution :

Posons : $u(x) = 3x+6$,

alors $u'(x) = 3$.

Donc $f(x) = \frac{1}{3}.\frac{3}{\sqrt{3x+6}}$

$= \frac{1}{3}.\frac{(3x+6)'}{\sqrt{3x+6}} = \frac{1}{3}.\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$

Donc les fonctions primitives de f sur $]-2;+\infty[$ sont les fonctions :

$F(x) = \frac{1}{3} \times 2\sqrt{u(x)} + c$

$= \frac{2}{3}\sqrt{3x+6} + c$ avec $c \in \mathbb{R}$